

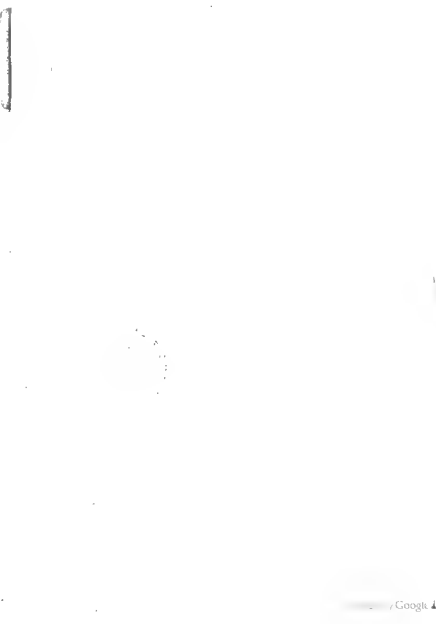
**ELEMENTA
GEOMETRIAE
INFINITESIMORUM
AUCTORE D.
HIERONYMO...**

Girolamo Saladini

5.4.362

5T.4.

XI
SALADIN



ELEMENTA GEOMETRIAE INFINITESIMORUM

AUCTORE
D. HIERONYMO SALADINI
LUCENSI

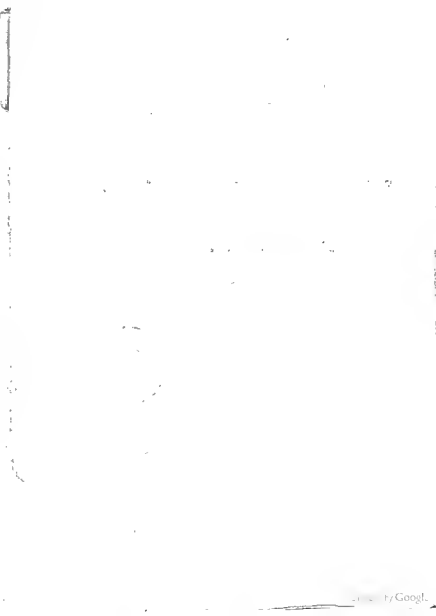
Monacho Castellani, & in eadem Congregatione Philosophiae Lectore,
nec non in Universitate Bononiensi publico Mathematicos Professore,

LIBRI TRES.



BONONIAE MDCCLX.

Ex Typographia S. Thomae Aquinatis.
SUPERIORUM PERMISSU.



iii

Illino & Rino Domino

**D. SERAPHINO
BRANCONE**
THEBARUM ARCHIEPISCOPO.

D. HIERONYMUS SALADINI P.

D*Uae potissimum caussae me
impulerunt, ut opusculum hoc meum,
qualecunque est, tibi inscriberem,
Illustrissime, & Reverendissime Prae-
sul. Nam primum quem mihi ma-
gis*

* *

gis patronum optavem, quam eum,
 a quo & splendorem summum, &
 adjumenta quamplurima, praesertim
 in litterarum studiis, in Congrega-
 tionem nostram universam redunda-
 runt? Te autem eum esse nemo u-
 nus ignorat; quippe & praeceptis op-
 timis, dum studiis praecesses, in eaque
 dignitate longe excelleres, & exqui-
 sitissima cujuscunque generis doctrina
 juvenes nostros imbuisi. Neque ve-
 ro a promovendis studiis, & Con-
 gregatione nostra, quacumque re o-
 pus esset, juvanda destitisti: quam-
 quam a Carolo Borbonio tunc Nea-
 politanorum, nunc Hispanorum Re-
 ge invictissimo, primum ad Episco-
 palem Sedem Gallipolitanam, tum
 ad

ad Thebarum Archiepiscopalem dignitatem vocatum, te a Congregatione nostra, veluti a nostro corpore distraxerint. Huc accedit praeclarissimi Fratris tui in nos studium incredibile, qui sapientissimi illius Regis primarius Rei Ecclesiasticae Administer quum esset, sic negotia nostra tractavit, ut videretur ea quoque in publicis totius Regni negotiis reposuisse. At haec quidem ad universum Caelestinorum Ordinem pertinent. Illa vero mea propria sunt, meque potissimum movent, quod Fratris alterius tui Cherubini, quem nunc Abbatem Generalem habemus, summam, ac prope incredibilem benignitatem & agnovi, & sum expertus. Id
quod

quod mihi facile omnes credent; quis enim illo aut alacrior in communi re administranda, aut prudentior, aut iustior, aut moderatior unquam fuit? Litterarum autem studia quam amanter promovet! quam liberaliter studiosos excipit! quam omni favore, & gratia complectitur! Huic ergo gratum facturum me esse existimaui, si libellum hunc meum, quasi studiorum meorum primitias, tibi, Illustrissime & Reverendissime Praeful, obsequentissime offerrem. Hunc igitur benigne accipe, meque in addictissimis, humillimisque tuis famulis habe.

LE-

LECTORI.



Uam utilia sint, quinimo & necessaria elementa Geometriae infinitesimorum, facile deprehendere potuit, quicumque animum ad sublimiores cognitiones rerum mathematicarum appulerit. Quum enim fieri nullo pacto possit, ut in illis, nisi quantitatum infinitesimarum ope, admodum proficiamus, hinc incredibile est, quibus difficultatibus, & erroribus obnoxii sint mathematicarum disciplinarum studiosi, qui affectiones, proprietates, relationesque magnitudinum infinitesimarum non probe teneant. Quae proprietates eo minus perspectae esse solent, quo altius evolvuntur, quam proprietates magnitudinum finitarum, quae passim in vulgari

Geo-

Geometria explicantur; potissimum vero, cum neminem adhuc viderim, qui in illis expendendis operam posuerit. Praeclarissimi viri Isaacus Newton, & Gotofridus Leibnitz, omnium primi methodum detexerunt supputandi quantitates infinitesimas, ad quam perficiendam postea sublimiora Europae ingenia insudarunt, & adhuc insudant; sed quamvis talis methodus Geometriae infinitesimorum tota innixa sit, nondum tamen, quod ego sciam, liber prodiit, qui pro ejus Geometriae elementis haberi possit; quamquam viam, ut ita dicam, stravisse videntur & summus Newton, ubi agit de methodo rationum primarum, & ultimarum; & lectissima Foemina Agnesia initio Tomi secundi Institutionum analyticarum. Hinc procul dubio factum est, ut methodi analyticae, quibus plerique utuntur, supputandi quantitates infinitesimas,

nec

nec ita universales interdum sint, quemadmodum hactenus creditum est, nec ita fortasse verae. Quod quum animadvertissem, mecumque ipse reputarem, num tale opus aggredi ipse possem, rem totam communicavi cum Vincentio Riccati Societatis Jesu, viro celeberrimo, & de mathematicis disciplinis optime merito, cui tribuenda est mea, qualiscunque sit, earumdem cognitio; is autem in proposito me confirmavit, omnemque timorem sustulit, quem mihi homini, praesertim adolescenti, & rei magnitudo asferre debebat, & virium infirmitas. Huc accessit etiam auctoritas praeclarissimi viri Francisci Mariae Zanotti a secretis Academiae Bononiensis, qui hoc consilium, supra quam cuique credibile est, mihi commendavit. Illud etiam in mentem veniebat, subtilissimum Rogerium Boscowich, & ipsum Societatis

Jesu

Jesū, quem Romae cognoveram, in magnitudinum infinitesimalium Synthesi mirum in modum delectari, neque verum Mathematicum existimare, qui hanc non calleret. Hisce de causis permotus non dubitavi Theoremata statim omni studio perquirere, quae rite demonstrata, atque ex ordine proposita, tractationem illam, quam desideraveram, quaeque pro elementis Geometriae infinitesimalium haberi posset, constituerent. Hanc ego emitto in libros tres divisam. In primo doctrinam expeditio triangulorum habentium determinationem ad quantitatem infinitesimam pertinentem, examino differentiam productorum, determinatis differentiis radicum, atque in Appendice hujusce libri considero rectas a vero parallelismo declinantes quantitate infinitesima. In secundo. verò perpendo differentias. arcuum, & angulorum in-

fini-

finitissimorum, eorumque linearum tri-
 gonometrarum, atque superficierum ab
 istis lineis, & solidorum ab istis super-
 ficiebus genitorum in rotatione semicit-
 ulorum circa diametros. In tertio tan-
 dem considero curvas generatim, quas
 mihi, ad maiorem claritatem, ut poly-
 gona finitissimorum laterum repraesent-
 to; imprimis examino angulos factos a
 tangentibus cum curva; deinde metho-
 dum trado determinandi ex quantitati-
 bus infinitesimis ordinis inferioris infi-
 nitesimas ordinis superioris, tam in
 curvis ad diametros relatis; quam in
 curvis relatis ad focum; trado similiter
 methodum dererminandi rectas maxi-
 mas, & minimas curvarum, dimetien-
 di earum curvaturas per circulos oscu-
 latorios; ubi ostendo non omnes cur-
 vas habere tales circulos, atque inutile
 esse conferre se ad vertices parabolarum

* * * *

pri-

primariarum, & superiorum pro mensurandis curvaturis, ubi evadunt minores omni circulo finito; ac tandem assigno methodum tutam, atque certam determinandi, & distinguendi in curvis puncta intersectionis, puncta flexus contrarii, atque regressus. Caeterum tibi, Lector benevole, hujus operis judicium relinquo; qui si minus rem ipsam, voluntatem certe, & desiderium meum, commendabis. Alii fortasse exemplo meo incitati, quod perficere ego non potui, perficient ipsi, & absolvent. Vale,



Ο' ΘΕΟ'Σ

Ο' ΘΕΟΣ Γεωμετρῶν.



TU autem Domine, quantus es Geometra? Quum enim haec scientia nullos terminos habeat, quum in sempiternum novorum theorematum inventioni locus relinquatur, etiam penes humanum ingenium, Tu uno haec omnia intuitu perspecta habes, absque catena consequentiarum, absque taedio demonstrationum. Ad caetera pene nihil facere potest intellectus noster; & tanquam brutorum phantasia, videtur nonnisi incerta quaedam somniare; unde in iis quot sunt homines, tot existunt fere sententiae: in his conspiratur ab omnibus, in his humanum ingenium se posse aliquid, imo ingens aliquid, & mirificum visum est,

ut

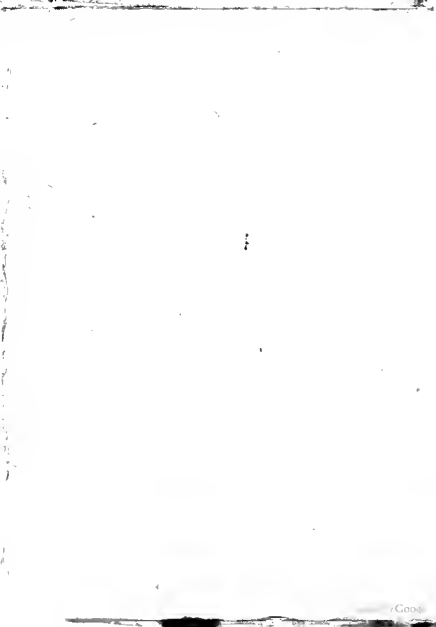
ut nihil magis mirum, quod enim in
 cacteris pene ineptum, in hoc efficax,
 sedulum, prosperum, &c. Te igitur
 vel ex hac re amare gaudeo, Te su-
 spicere, atque illum diem desiderare
 suspiriis fortibus, in quo purgata men-
 te, & claro oculo non haec solum om-
 nia absque hac successiva, & laboriosa
 imaginandi cura, verum multo plu-
 ra, & majora, ex tua Bonitate, & im-
 mensissima, sanctissimaque Benignitate
 conspiciere, & scire concedetur, &c.

*Cl. Barrowii verba Apollonio
 suo praefixa.*

ELE.

✓

ELEMENTA
GEOMETRIAE
INFINITESIMORUM
LIBER PRIMUS.



DEFINITIONES.

DEF. I.



GOMETRIA infinitesimorum est scientia, qua considerantur relationes magnitudinum infinitesimarum.

DEF. II.

Quis quis sibi quantitates aliquas considerandas, atque inter se comparandas proponit, si id, quod agit, paulo diligentius secum reputet, facile intelliget, in unoquoque quantitarum genere se unam quasi primam assumere, ad quam aliae omnes ejusdem generis referantur, cujusque respectu aliarum magnitudines determinantur. Prima illa quantitas, qualiscumque ea sit, dicitur *unitas*; & est quasi communis mensura unitas, quae assumitur, omnesque aliae quantitates, quae ad unitatem proportionem habent finitam,

A

tam,

2
tam (idest eam , quae finito numero ex-
primi possit) dicuntur *assignabiles* , a non-
nullis etiam *finitae* .

DEF. III.

Si inducatur quantitas major quacun-
que assignabili , quaeque idcirco ad uni-
tatem , quae assumpta est , proportionem
habeat adeo magnam , ut nullo finito nu-
mero possit exprimi , ea dicitur *quantitas*
infinita .

DEF. IV.

Si inducatur quantitas minor quacun-
que assignabili , quaeque idcirco ad uni-
tatem , quae assumpta est , proportionem
habeat adeo parvam , ut nullo finito nu-
mero possit exprimi , ea dicitur *quantitas*
infinitesima . Erunt autem infinitesimae
aliae omnes quaecunque ad hanc habent
proportionem assignabilem , idest finito
numero exprimendam , veluti si sint ejus
duplae , triplae &c. quod facile patet ,
Hinc praeter quantitates assignabiles , ex-
istit

stet jam alter quantitatum ordo, nempe infinitesimalium. Ac plane constat quantitatem quamvis infinitesimam, quantumcunque ea repetatur, modo finitius tantum repetatur, nunquam evadere posse assignabilem; ut ergo evadat assignabilis, necesse esse, ut repetatur infinities; quo sane apparet *infinita distantia*, quae intercedere dicitur inter quantitates assignabiles, & infinitesimas.

DEF. V.

Porro cum ordinem quempiam induxeris quantitatum infinitesimalium, quae infinite distent ab assignabilibus, nihil impedit, quominus alias etiam quantitates singas, quae ab illis infinitesimalibus, quas induxisti, eadem ratione distent infinite, quaeque alium infinitesimalium ordinem constituent. Eo modo ad alios aliosque infinitesimalium quantitatum ordines deinceps procedes, quoad libuerit. Is ordo infinitesimalium, quem tibi post quantitates assignabiles primum proponis, dicitur *primus infinitesimalium ordo*. Quem

A 2

tibi

4
tibi post hunc proponis, dicitur *secundus*.
Alii deinceps *tertius*, *quartus* &c. Secun-
dus ordo dicitur superior primo, tertius
secundo &c.

DEF. VI.

Numerus naturalis, ex quo ordo infi-
nitesimorum denominationem suam forti-
tur, appellatur *numerus ordinis*; hinc or-
dines summare, unum ab alio subtrahe-
re, est summare, & subtrahere numeros
ordinum.

DEF. VII.

Ordo *duplo*, vel *triplo major* relate
ad alium ordinem dicitur ille, cujus nu-
merus est duplus, vel triplus relate ad
numerus istius ordinis.

AXIO.

A X I O M A T A.

A X I O M A I.

QUoniam proportio quantitatis infinitesimae ad assignabilem adeo minima est, ut nullo assignabili, aut determinato numero, quantumvis minimo, possit exprimi, idest mensuras omnes fugiat quascunque, ut ut minimas, excogitate, aut determinare possumus; ea re fit, ut, si quantitates assignabiles inter se comparare, certisque mensuris dimeriri velimus, nulla sit nobis ratio habenda quantitarum infinitesimalium; quae idcirco in illa consideratione perinde habentur, ac si nihil plane essent. Quare si quantitati assignabili infinitesima quaevis addatur, aut dematur, illius magnitudo nihil mutari censebitur. Eandem ob causam si quantitati infinitesimae cujusvis ordinis addatur, aut dematur infinitesima ordinis superioris, v. gr. si infinitesimae tertii ordinis addatur, aut dematur infinitesima ordinis quarti, magnitudo illius eadem, quae antea, manere existimabitur.

A X I O.

AXIOMA II.

Nulla magnitudo in se infiniresima censi debet, sed tantum relative ad alias; hinc non semper tales magnitudines spectari possunt, sed tantum relative. Hinc etiam fit, ut eadem quantitas possit esse infiniresima diversi ordinis respectu ad diversas quantitates diversorum ordinum.

AXIOMA III.

Si quatuor magnitudines sint geometricè proportionales, & antecedens primae rationis sit infiniresima, vel finitus, vel infinitus relate ad suum consequentem; erit etiam antecedens secundae rationis infiniresimus ejusdem ordinis, vel finitus, vel infinitus relate ad suum consequentem.

PRO-

PROPOSITIO I.

7

SI duae quantitates $A B$, $D E$ differant a duabus $A C$, $D F$ infinitesima quantitate; ratio $A B$ ad $D E$ non differt a ratione $A C$ ad $D F$. Fig. 1.

Demonst. $A C$ est ad $D F$ in ratione composita $C A$ ad $A B$, $A B$ ad $D E$, & $D E$ ad $D F$; sed rationes $C A$ ad $A B$, & $D E$ ad $D F$ non differunt a ratione aequalitatis. Ergo ratio $B A$ ad $D E$ non differt a ratione $C A$ ad $D F$. *Q. E. D.*

SCHOLION.

Linea infinitesima B potest referri ad assignabilem A duobus modis. Primum quatenus magnitudinem ejus auget, vel minuit, si ipsi addatur, vel dematur. Hic vero lineola B pro nihilo habetur; quippe ex ejus additione, vel detractio-
ne nihil mutatur proportio lineae A ad aliam quamlibet assignabilem; vel si quid mutatur, mutatio est minor quacunque mutatione assignabili: atque hinc patet,
nihil

Fig. 2.

nihil referre, utrum lineola B sit major minore, modo sit infinitesima. Secundo potest referri lineola B ad lineam A, quatenus in ipsam infinities ingreditur, & infinities repetita ipsam constituit. Quod nihil sane aliud est, nisi considerare proportionem, quam habet A ad B; quae proportio utique infinita est, nec ullus assignari potest tantus numerus, qui ipsam exprimat. Hic vero plurimum refert, utrum lineola B sit major, vel minor. Etenim quamvis proportio lineae A ad lineolam B sit infinita, tamen erit duplo major, si linea B fuerit duplo minor, & omnino tanto major erit proportio, quanto lineola B minor erit.

Fig. 3. Ex his illud sequitur: si duabus lineis assignabilibus A B, C D addantur infinitesimae duae, qualescunque sint B X, D Y, proportio assignabilium nihil mutabitur; quippe quod ipsarum magnitudines eadem aestimabuntur, quae antea. Licebit ergo ponere $A X, C Y :: A B, C D$.

Nihilque impediet, quominus Euclidis insistens demonstrationibus, & m-

uer-

9
 Invertendo argumenteris: ergo CY, AX
 $: : CD, AB$; & alternando; ergo $AX,$
 $AB : : CY, CD$; & componendo:
 Ergo $AX + CY, CY : : AB +$
 CD, CD ; & dividendo: ergo $AX -$
 $CY, CY : : AB - CD, CD$ &c.
 Idque perpetuo licebit usquedum lineae
 tantum assignabiles $AB, AX, CD,$
 $CY, AX - CY, AB - CD$ &c.
 in proportionalitatem venerint.

Atqui licet neque invertendo, neque
 alternando, neque componendo ex illa
 proportionalitate $AX, CY : : AB,$
 CD ullae aliae lineae, praeter quam as-
 signabiles in proportionalitatem venire
 possint; tamen dividendo prodire pòte-
 runt, & in proportionalitatem venire duae
 infinitesimae BX, DY ; id quod, tum
 demum accidet, si posito $AX, AB : :$
 CY, CD , dividendo argumenteris: er-
 go $AX - AB, AB : : CY - CD,$
 CD . Sive $BX, AB : : DY, CD,$
 vel quod eodem recidit: $AB, BX : :$
 CD, DY .

Quod si quantitates infinitesimae $BX,$
 DY in proportionalitatem venerint, at-

B

gu-

gumentationem illam, quam dividendo instituisſi, & unde infinitesimae illae prodierunt, pro falsa habebis; nisi forte lineolae BX , DY posita ab initio fuerint proportionales lineis AB , CD ; vel a duabus, quae sint iisdem AB , CD proportionales, differant quantitate infinitesima ordinis superioris respectu ejus ordinis, cujus sunt ipsae lineae BX , DY ; etenim si BX , & DY sint qualescunque, erit etiam qualescunque proportio AB ad BX , & qualescunque pariter erit, proportio CD ad DY ; & poterunt proportionales hae duae diversae esse; nec tunc poni poterit AB , $BX :: CD$, DY .

Fig. 4. Quare si in triangulo ABC ducta sit linea recta DE abscindens partes infinitesimas qualescunque AD , AE , licebit utique ponere AB , $AC :: DB$, EC , & AB , $DB :: AC$, EC ; neque hinc tamen licebit dividendo argumentari: ergo AD , $DB :: AE$, EC ; nisi ab initio posita fuerit linea recta DE parallela rectae BC , vel discrepans a vero parallelismo quantitate infi-

11

infinitesima, abscindens lineolas DA , EA eandem habentes inter se proportionem, quam habent lineae rectae AB , AC .

PROPOSITIO II.

Posita serie finita quantitarum ejusdem ordinis continue proportionallium BA , CD , MN &c. cujus duo proximi termini BA , CD differant quantitate infinitesima SD dico omnes proximos terminos finitae seriei differre quantitate infinitesima ejusdem ordinis. Fig. 5.

Demonst. Quoniam MN est ad CD , ut CD ad BA ; erit etiam dividendo $MN - CD$ ad CD , ut $CD - BA$ ad BA , hoc est NL erit ad CD , ut DS ad BA , & permutando NL erit ad DS , ut CD ad BA ; sed CD , & BA sunt ejusdem ordinis: ergo differentiae NL , DS sunt similiter ejusdem ordinis. Cumque eadem demonstratio repeti possit per omnes terminos finitae seriei, ergo patet. *Q. E. D.*

COROLLARIUM I.

Per propositionem $L N$ est ad $D S$, ut $C D$ ad $B A$: ergo dividendo $L N$ — $S D$ ad $S D$, ut $S D$ ad $B A$; adeoque differentia differentiarum $L N$, $S D$ est infinitesima ejusdem ordinis respectu $S D$; ac est $S D$ respectu $B A$. Idem dicito de differentiis differentiarum in infinitum.

COROLLARIUM II.

Cum differentiae $S D$, $L N$ tamquam aequales considerari possint, hinc quantitates $B A$, $C D$, $M N$ spectari possunt veluti aequidifferentes, licet sint geometricè proportionales.

COROLLARIUM III.

Patet etiam differentiam duorum quorumcumque terminorum $B A$, $M N$ praedictae seriei esse ejusdem ordinis, ac est infinitesima $D S$; quandoquidem differentia illa nihil aliud est, quam ipsa

$D S$

13

D S repetita vicibus numero finitis ,
spectis tamen nonnullis infinitesimis re-
spectivis.

PROPOSITIO III.

SI sint plures quantitates A, B, C, Fig. 6.
&c. ita determinatae, ut B sit infi-
nitesima respectu A, C sit infinitesima
respectu B, & sic deinceps: dico C es-
se infinitesimam respectu A ejus ordinis,
qui resultat ex summa ordinis C respec-
tu B, cum ordine B respectu A.
Demonst. Quantitas C, ut evadat e-
jusdem ordinis, ac est quantitas A, tran-
sire debet per tot infinita, quor sunt
unitates in numero ordinis C respectu
B, & in numero ordinis B respectu A.
Ergo numerus ordinis C respectu A ha-
betur si summentur numerus ordinis C
respectu B, & numerus ordinis B respec-
tu A; adeoque ordo C respectu A
resultat ex summa ordinis C respectu
B, cum ordine B respectu A. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO IV.

Fig. 7. **S**I sint plures quantitates A, B, C &c. infinitesimae cujuscunque ordinis, erit factum omnium quantitarum praedictarum infinitesimum ejus ordinis, qui resultat ex summa ordinum quantitarum A, B, C &c.

Demonst. Sumantur totidem quantitates assignabiles quaecumque a, b, c &c. quot sunt quantitates infinitesimae A, B, C &c. cum fiat A ad S , ut b ad B , S ad X , ut c ad C &c. Factum omnium quantitarum assignabilium a, b, c &c. est ad factum omnium quantitarum A, B, C &c. in ratione composita a ad A , b ad B , c ad C &c. seu in ratione composita a ad A , A ad S , S ad X &c. seu in ratione a ad X . Sed X respectu ad assignabilem a est infinitesima ejus ordinis, qui resultat ex summa ordinis X respectu S , & S respectu A , & A respectu a , (1) ergo factum omnium quantitarum infinitesimarum A, B, C &c. est ejus ordinis, qui resultat ex summa ordinum omnium quantitarum A, B, C &c. *Q. E. D.*

(1) per
3. prop.

PRO-

15

PROPOSITIO V.

IN circulo si anguli ad centrum, vel ad peripheriam sunt infinitesimi cujuscunque ordinis: erunt etiam arcus, quibus insistant, infinitesimi ejusdem ordinis, & viceversa.

Demonst. Anguli *sive* ad centrum, sive ad peripheriam proportionales sunt arcubus, quibus insistant, & viceversa; sed angulis finitis respondent arcus finiti, & viceversa: ergo pater. *Q. E. D.*

PROPOSITIO VI.

IN circulo arcus minor BC , & chorda BC sunt ejusdem ordinis. Fig. 8.

Demonst. Sumatur arcus minor BC in peripheria circuli quoties fieri potest, & arcubus ducantur subtensae, quae omnes aequales erunt chordae BC . Erit arcus BC ad summam omnium arcuum in peripheria sumptorum, ut subtensa BC ad summam omnium subtensarum respondentium. Sed summa omnium

nium arcuum, & summa omnium subtensarum sunt ejusdem ordinis: ergo patet. *Q. E. D.*

COROLLARIUM I.

Ducta ex centro A recta A M secante bifariam arcum B C in M, haec biseccabit quoque chordam in R ad angulos rectos; adeoque C R erit sinus rectus anguli C A M; hinc sinus rectus, & arcus cujuscunque anguli sunt ejusdem ordinis.

COROLLARIUM II.

Anguli sive ad centrum, sive ad peripheriam sunt ejusdem ordinis, ac sunt arcus (1); sed arcus sunt ejusdem ordinis, ac sunt sinus recti (2): ergo anguli sunt ejusdem ordinis, ac sunt sinus recti.

(1) *per hanc prop.*
 (2) *per coroll. 1. huj. pro.*

COROLLARIUM III.

Hinc in triangulo rectangulo, ac proinde in triangulo quocunque, cujus anguli

guli sunt omnes finiti latera sunt ejus-
dem ordinis. 17

PROPOSITIO VII.

IN triangulo rectangulo, & acutangu-
lo unus dumtaxat angulus esse potest
infinitesimus: in triangulo verò obtusangu-
lo duo anguli esse possunt infinitesimi,
& quidem diversorum ordinum.

Demonst. prima pars. Si duo anguli
essent infinitesimi in triangulo rectangu-
lo, & acutangulo; cum tertius ex hy-
pothesi sit rectus, aut acutus; hinc sum-
ma trium angulorum in triangulo non
aequaret duos rectos: quod est absur-
dum.

Demonst. secunda pars. In triangulo
obtusangulo duo anguli infinitesimi cum
angulo obtuso possunt conficere summam
duorum rectorum.

C

PRO-

Fig. 9. **I**N triangulo acutangolo scaleno $A B C$ sit angulus B infinitesimus; duorum reliquorum angulorum A , & C minor sit C . Dico primum differentiam anguli C ab angulo recto esse infinitesimam ejusdem ordinis, cujus est angulus B . Dico secundum differentiam anguli A ab angulo recto posse esse infinitesimam cujuscunque ordinis..

Demonst. prima pars. Ex angulo B demittatur normalis $B D$ in basin $A C$, hac normalis cadet intra triangulum $A B C$; erit igitur triangulum $A B C$ divisum in duo triangula rectangula $A D B$, $C D B$. Ergo angulus A cum angulo $A B D$, aequalis est angulo C cum angulo $C B D$; sed ex hypotesi angulus C minor est angulo A . Ergo angulus $C B D$ major est angulo $A B D$; adeoque major est dimidio anguli $A B C$; hinc angulus $C B D$ est infinitesimus ejusdem ordinis, cujus est angulus B ; sed angulus $C B D$ est differentia, anguli C ab angulo recto.. Ergo,
angu-

19

angulus minor C differt ab angulo recto quantitate infinitesima ejusdem ordinis, cujus est angulus B. *Q. E. P.*

Pars secunda patet per se.

COROLLARIUM.

Hinc anguli A, & C non possunt differre nisi quantitate infinitesima ejusdemque ordinis incipiendo ab ordine anguli B.

PROPOSITIO IX.

IN triangulo rectangulo B A C si unus ex angulis acutis, ex. gr., C sit infinitesimus cujuscunque ordinis, erit latus oppositum B A infinitesimum ejusdem ordinis; reliqua vero latera A C; B C infinitesimum angulum comprehendentia differunt quantitate infinitesima ordinis duplo majoris anguli C. Et viceversa si unum ex lateribus angulum rectum continentibus, ex. gr., B A sit infinitesimum cujuscunque ordinis; angulus

Fig. 70.

C 2

gulus ipsi oppositus C erit infinitesimus ejusdem ordinis.

Demonst. prima pars. In triangulo rectangulo B A C sit angulus A rectus, latus oppositum ipsi erit B C, quo posito pro sinu toto, erit B A sinus rectus anguli C. Ergo latus B A est ejusdem ordinis, cujus est angulus C. (1)

(1) per
coroll. 2.
prop. 6.

Q. E. P.

Demonst. secunda pars. Centro C in intervallo C A abscindatur C M aequalis C A: erit B M differentia laterum A C, B C; cum autem rectangulum B M in B C \pm C A aequetur quadrato B A; hinc ut A C \pm C B ad B A, ita B A ad B M. Ergo ordo rectae B M respectu B A, idem est, ac ordo rectae B A respectu B C; adeoque ordo rectae B M respectu B C est duplo major ordine rectae B A respectu ejusdem B C, seu est duplo major ordine anguli C.

Q. E. S.

Pars tertia. Patet ex Corollario Propositionis sextae.

PRO-

PROPOSITIO X.

IN triangulo acutangulo scaleno B A Fig. 11.
 C posito angulo C infinitesimo cu-
 juscunque ordinis, erit latus oppositum
 infinitesimum ejusdem ordinis; reliqua
 vero latera B C, A C differre possunt
 quantitate infinitesima cujuscunque ordi-
 nis superioris, incipiendo ab ordine du-
 plo majore anguli C; & viceversa si la-
 tus unum B A sit infinitesimum cujusc-
 unque ordinis, erit angulus oppositus C
 infinitesimus ejusdem ordinis.

Demonst. prima pars. Ponatur angu-
 lus A minor angulo B. Quoniam angu-
 lus A ex hypothese est finitus, hinc du-
 cta ex angulo majori B normale B R in
 latus C A, erunt in triangulo rectangu-
 lo A B R sinus totus A B, & sinus re-
 ctus B R ejusdem ordinis (1); sed sinus
 rectus B R est infinitesimus ejusdem or-
 dinis, ac est angulus C (2). Ergo la-
 tus A B erit infinitesimum ejusdem or-
 dinis, ac est angulus C. Q. E. P.

(1) per
 coroll. 2.
 prop. 6.
 (2) per
 9. prop.

Demonst. secunda Pars. Angulus acu-
 tus A differt a recto per angulum A B R
 infini-

- infinitesimum ejusdem ordinis, ac est angulus C (1). Ergo in triangulo rectangulo ABR recta AR est infinitesima respectu AB ejusdem ordinis, cujus est AB respectu AC (2); adeoque AR est infinitesima respectu AC ordinis duplo majoris anguli C . Ergo recta AC excedit rectam CR quantitate infinitesima ordinis duplo majoris anguli C ; sed CB excedit CR quantitate infinitesima ordinis duplo majoris anguli C (3). Ergo latera AC , CB differre non possunt nisi quantitate infinitesima ordinis duplo majoris anguli C , vel alterius ordinis superioris. *Q. E. S.*

Pars tertia patet ex demonstratione primæ partis.

PROPOSITIO XL

- Fig. 12. **I**N triangulo obtusangulo BAC si angulus unus C sit infinitesimus; erit latus BA oppositum infinitesimum ejusdem ordinis; reliqua vero latera BC , CA differunt quantitate infinitesima ordinis

dinis ipsius anguli C : & viceversa si unus ex angulis acutis, ex. gr., B sit finitus, & latus tantum, quod continetur inter angulum obtusum A , & acutum finitum B sit infinitesimum; erit angulus C oppositus infinitesimus ejusdem ordinis.

Demonst. prima pars. Ex angulo obtuso A demittatur normalis AR in latus BC ; erunt anguli B , & BRA , RAB finiti; hinc AB , BR , RA sunt ejusdem ordinis (1); sed AR est ejusdem ordinis, cujus est angulus C (2). Ergo BA , BR sunt ordinis ejusdem, cujus est angulus C . *Q. E. P.*

(1) per
coroll. 3.
prop. 6.

(2) per
9. prop.

Pars secunda. BC excedit CR quantitate BR infinitesima ordinis anguli C ; sed CR non differt a CA nisi quantitate infinitesima ordinis duplo majoris anguli C (3); hinc (cum haec secunda differentia sit infinitesima respectu ad primam BR) BC excedit CA quantitate infinitesima ordinis ejusdem, cujus est angulus C . *Q. E. S.*

(3) per
9. prop.

Pars tertia patet ex demonstratione primae partis..

PRO..

Fig. 13. **I**N triangulo obtusangulo $A B C$, in quo angulus unus C est infinitesimus, si angulus obtusus $A B C$ major sit angulo recto, quantitate infinitesima ordinis cujuscunque superioris; incipiendo ab ordine anguli C inclusive, erit differentia latetum infinitesimum angulum comprehendentium infinitesima ordinis duplo majoris anguli C ; si vero angulus obtusus $A B C$ major sit angulo recto quantitate infinitesima ordinis inferioris relate ad ordinem anguli C ; differentia laterum $C A$; $C B$ erit infinitesima ordinis, qui resultat ex summa ordinis anguli C cum ordine differentiae anguli $B A C$ a recto.

Demonst. prima pars. Ex puncto B erigatur normalis $B S$ ad $B C$; erit angulus $A B S$ differentia anguli $A B C$ a recto. Quoniam angulus $A B S$, vel est infinitesimus ejusdem ordinis, ac est angulus C , vel ordinis superioris per suppositionem; hinc in triangulo obtusangulo $A S B$ erit $A S$ respectu $A B$,
vel

vel infinitesima ordinis anguli C, vel ordinis superioris; (1) adeoque A S respectu B C vel erit infinitesima ordinis duplo majoris anguli C, vel ordinis superioris (2). Ergo, cum S C excedat B C quantitate infinitesima ordinis duplo majoris anguli C (3), A C excedit B C quantitate infinitesima ordinis duplo majoris anguli C. *Q. E. P.*

(1) per
11. prop.

(2) per
3. prop.

(3) per
9. prop.

Demonst. secunda pars. A S respectu A B est infinitesima ordinis anguli A B S; A B respectu B C est infinitesima ordinis anguli C. Ergo A S respectu B C est infinitesima ordinis anguli A B S summati cum ordine anguli C (4); sed S C excedit C B quantitate infinitesima ordinis duplo majoris anguli C. Ergo, cum haec infinitesima sit respectu A S, erit A S differentia inter latera A C, B C infinitesima ordinis, qui resultat ex ordine anguli A B S summato cum ordine anguli C. *Q. E. S.*

(4) per
3. prop.

SCHOLION.

Ex omnibus triangulis angulum unum
D infini-

infinirefimum habentibus, si fuerit isoscele, erit differentia laterum angulum infinitefimum continentium absolute nulla; si fuerit acutangulum scalenum, differentia laterum esse potest cujuscunque ordinis superioris, incipiendo ab ordine duplo majore anguli infinirefimi. Si fuerit rectangulum, vel obtusangulum, in quo angulus obrusus major est recto quantitate infinitefima, cujuscunque ordinis superioris, incipiendo ab ordine anguli infinirefimi trianguli, erit differentia laterum ordinis duplo majoris anguli infinirefimi; si fuerit obtusangulum, in quo angulus obrusus major est recto quantitate infinitefima ordinis inferioris relate ad ordinem anguli infinirefimi trianguli, erit differentia laterum ordinis, qui resultat ex ordine anguli infinirefimi trianguli summato cum ordine differentiae anguli obtusi a recto. Si tandem angulus sit finitè obrusus, differentia erit ordinis anguli infinirefimi.

PRO-

27
PROPOSITIO XIII.

IN triangulo obtusangulo $A B C$, si duo anguli A , & C sint infinitesimi ejusdem ordinis, omnia latera sunt ejusdem ordinis; differenria vero lateris $A C$ obtuso angulo B oppositi a lateribus $A B$, $B C$ obtusum angulum continentibus est infinitesima ordinis duplo majoris angulorum A , & C : viceversa si in triangulo obtusangulo $A B C$ latera $A B$, $B C$, $C A$ sunt ejusdem ordinis, & angulus B differat a duobus rectis quantitate infinitesima, erunt anguli A , & C infinitesimi ejusdem ordinis.

Fig. 14.

Demonst. prima pars. Ex angulo obtuso B in basin $A C$ demittatur normalis $B S$; hæc respectu ad latus $B C$ erit infinitesima ejusdem ordinis, ac est angulus C ; similiter $B S$ respectu $A B$ est infinitesima ejusdem ordinis, ac est angulus A (1); sed anguli A , & C sunt ejusdem ordinis per suppositionem; ergo normalis $B S$ est ejusdem ordinis, tum respectu $B C$, tum respectu $B A$; ergo

(1) per
9. prop.

D 2 late-

latera $B C$, $B A$ sunt ejusdem ordinis; quod tertium $A C$ sit ejusdem ordinis, ac sunt $B A$, $B C$, per se clarum est. Pater igitur *Q. E. P.*

Demonst. secunda pars. $B C$ differat a $C S$ quantitate infinitesima ordinis duplo majoris anguli C , seu anguli A ; similiter $A B$ differt ab $A S$ quantitate infinitesima ordinis duplo majoris anguli A (1). Ergo $B A \div B C$ differt ab $A C$ quantitate infinitesima ordinis duplo majoris anguli A , vel C , *Q. E. S.*

(1) per
9. Prop.

Pars tertia patet ex prima.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 14. **I**N triangulo obtusangulo $A B C$, si duo anguli A , & C sint infinitesimi diversorum ordinum; erit latus $B A$ oppositum angulo C infinitesimo ordinis superioris & ipsum infinitesimum; & quidem ejus ordo habetur, si subtrahatur ordo anguli A , ab ordine anguli C . Latera vero $B C$, $C A$ angulum infinitesim-

infinitesimum C comprehendentia differunt
quantitate $A B$. Viceversa si latus $B A$
sit infinitesimum, & angulus B differat
a duobus rectis quantitate infinitesima;
erit angulus oppositus C infinitesimus:
& quidem ejus ordo habetur, si summe-
tur ordo lateris $A B$ cum ordine an-
guli, quo differt angulus B a duobus
rectis.

Demonst. prima pars. Ex angulo ob-
tusulo B in latus $A C$ demittatur nor-
malis $B S$. Ordo rectae $B S$ respectu B
 C idem est, ac ordo anguli C (1). Er-
go recta $B S$, ut evadat ejusdem ordi-
nis, cujus est $B C$, transire debet per
tot infinita, quot sunt unitates in nu-
mero ordinis anguli C ; similiter recta
 $B S$ respectu $B A$ est infinitesima ejus-
dem ordinis, cujus est angulus A (2).
Ergo $B S$, ut sit ejusdem ordinis, ac
est $B A$, transire debet per tot infinita,
quot sunt unitates in numero ordinis an-
guli A . Ergo recta $A B$, ut sit ejusdem
ordinis, cujus est $B C$, transire debet
per tot infinita, quot sunt unitates in
differentia ordinis anguli A ab ordine
anguli C . *Q. E. P.* De-

(1) per
9. prop.

(2) per
9. prop.

Demonst. secunda pars. Quoniam angulus A est infinitesimus, rectae AB , AS differunt quantitate infinitesima ordinis duplo majoris anguli A relate ad AB , quemadmodum rectae CB , CS differunt quantitate infinitesima ordinis duplo majoris anguli C ; ergo, cum AS , seu AB sit differentia laterum AC , SC , erit etiam differentia laterum AC , BC spretis nonnullis infinitesimis respectivis. *Q. E. S.*

Pars tertia patet ex prima.

PROPOSITIO XV.

Fig. 14. **I**N triangulo obtusangulo ABC , in quo sunt duo anguli A , & C infinitesimi diverſi ordinis, erit differentia, quae intercedit inter latus AC obruſo angulo oppositum, & latera AB , BC obtuſum angulum continentia, infinitesima ejus ordinis, qui resultat ex summa ordinum angulorum A , & C .

Demonst. Differentia, quae intercedit inter AS , & AB est infinitesima ordinis

dinis duplo majoris anguli A (1) relate (1) per
 ad A B; sed A B relate ad A C est 9^a prop.
 infinitesima ordinis, qui resultat ex sub-
 tractione ordinis anguli A ab ordine an-
 guli C (2). Ergo differentia, quae in- (2) per
 tercedit inter latera A S, A B, est 14^a prop.
 infinitesima ordinis, qui resultat ex sum-
 ma ordinis anguli A, cum ordine an-
 guli C (3). Differentia, quae intercedit (3) per
 inter latera B C, C S est 3^a prop.
 ordinis duplo majoris anguli C (4). (4) per
 Igitur, cum haec differentia infinitesima 9^a prop.
 sit relate ad primam, erit illa differen-
 tia, quae intercedit inter latera A C,
 & latera A B, B C. Q. E. D.

PROPOSITIO XVI.

IN triangulo rectangulo, & acutangu-
 lo, in quo angulus unus est infini-
 tesimus, reliqui anguli pro aequalibus
 accipi possunt; minime vero in trian-
 gulo obrusangulo, in quo angulus unus
 est infinitesimus..

Prima pars. patet. ex natura trianguli
 rectan-

32
rectanguli, & ex corollario propositionis
octavae. Altera pars per se est mani-
festa.

SCHOLION.

Hæc propositio, licet per se clata, at-
tamen sedulo perpendenda est; multum
enim conducit ad evitandos paralogis-
mos, dum agitur de quantitatibus infi-
nitesimis. Etenim innuit, quod licet a-
liqua figura spectis quantitatibus infi-
nitesimis possit habere nonnullas proptie-
tates communes aliis figuris, nihilomi-
nus non sequitur illam habere omnes pro-
prietates istarum figurarum. Sic, ex. gr.,
ex propositionibus IX., X., XI. spectis
quantitatibus infinitesimis, quibus diffe-
runt latera angulum infinitesimum com-
prehendenria, sequitur latera illa esse æ-
qualia; ac proinde triangula in hoc ca-
su habere præcipuam proprietatem tri-
anguli isoscelis: male ex hoc quis con-
cluderet prædicta triangula habere om-
nes proprietates trianguli æquicruris;
ut videre est potissimum in triangulo
obtusân-

obtusangulo, in quo angulus unus est infinitesimus. Sic etiam per propositionem praesentem in triangulo rectangulo, in quo angulus unus est infinitesimus, reliqui anguli, spectis differentiis infinitesimis, sunt aequales. Ex hoc tamen colligendum non est, triangulum illud habere reliquas proprietates trianguli aequicruti; quod sic demonstro. Proprietas una trianguli aequicruti est, quod, ducta ex vertice in basim normale, basis bisecetur; haec proprietas non verificatur in triangulo rectangulo, in quo angulus unus est infinitesimus. Igitur omnes proprietates, quae de aliqua figura, spectis infinitesimis, adstruuntur, rigoroso ratiocinio sunt demonstrandae.

PROPOSITIO XVII.

IN triangulo ABC , in quo omnes anguli sunt finiti, si latus unum CB augeatur, vel minuatur infinitesima quantitate CD ; dico angulum A oppositum augeri, vel minui, & angulum C ex parte

Fig. 15.

parte fluxionis CD viceversa minui, & augeri quantitate infinitesima ejusdem ordinis; latus AC ex parte fluxionis CD , & rotum triangulum BAC similiter augeri, vel minui quantitate infinitesima ejusdem ordinis.

Demonst. pars prima. Ex puncto C in AD , si opus est, productam demittatur normalis CR . Cum hypothenusa CD sit infinitesima, & anguli $RC D$, RDC sint finiti; erunt CR , RD infinitesimae ejusdem ordinis (1); adeoque angulus CAR est infinitesimus ejusdem ordinis (2), sicuti & triangulum CAD . Ergo angulus BAC auctus est, vel imminutus; & viceversa angulus ACB imminutus est, vel auctus quantitate CAD infinitesima ejusdem ordinis, ac est CD . *Q. E. P.*

Demonst. secunda pars. Quoniam triangulum CAD est infinitesimum ejusdem ordinis, cujus est CD ; erit triangulum BAC auctum, vel imminutum infinitesima quantitate ejusdem ordinis, cujus est CD ; & cum AR non differat ab AC , nisi quantitate infinitesima
ordi-

(1) per
coroll. 3.
prop. 6.

(2) per
9. prop.

ordinis duploma-joris CR , seu CD ³⁵
 (1), & RD sit infinitesima ejusdem or-
 dinis, cujus est CD ; hinc AC aucta ^{(1) per}
 est, vel imminuta quantitate infinitesima ^{2^a prop.}
 ejusdem ordinis, cujus est CD . *Q. E. S.*

SCHOLION.

Facile demonstrari poreft, fi angulus
 BAC , aut triangulum BAC , ma-
 nente latere AB , & angulo B , augea-
 tur, vel minuat^r infinitesima quantita-
 te, etiam latus BC augeri, vel minui
 infinitesima quantitate ejusdem ordinis;
 ac proinde verificari inverfam propo-
 fitionem.

PROPOSITIO XVIII.

SI duo latera BD , BE trianguli B Fig. 16.
 DE augeantur, vel minuantur pro-
 portionaliter infinitesima quantitate, et-
 iam latus DE , & triangulum BDE
 augebitur, vel minuetur quantitate infi-
 nitesima ejusdem ordinis.

Prima pars patet.

E 2

De-

Demonst. secunda pars. Triangulum $D B E$ est ad triangulum $A B C$, ut quadratum $B E$ est ad quadratum $B C$, seu ut $B E$ ad M tertiam proportionalem post $B E$, $B C$; ergo dividendo trapezium $D A C E$ est ad triangulum $A B C$, ut $B E - M$ ad M ; sed $B E - M$ est infinitesima ejusdem ordinis, cujus est $C E$ (1). Ergo trapezium $D A C E$ est infinitesimum ejusdem ordinis, cujus est $C E$. *Q. E. S.*

(1) per
coroll. 3.
prop. 2.

PROPOSITIO XIX.

Fig. 17. **S**I latera $B D$, $B H$ rectanguli $B A$ augeantur, vel minuantur infinitesima quantitate $B G$, $B F$, dico in primo casu rectangulum $A B$ augeri rectangulis $B D$ in $B F$, $B H$ in $B G$, $F B$ in $B G$; in altero casu minui rectangulis $B D$ in $B F$, $B H$ in $B G$ minus rectangulo $F B$ in $B G$.

Demonstratio utriusque partis patet ex sola inspectione figurae.

SCHOL-

SCHOLION I.

Ex sola inspectione etiam figurae solidae, si adesset, constaret differentiale parallelepipedum facti a rectis A, B, C , auctis quantitatibus infinitesimis S, X, Z , esse parallelepipeda $B A Z, B C S, A C X, S X C, X Z A, S Z B, S X Z$. Hinc facile erui potest differentiale facti plurium quantitarum $A, B, C, D, \&c.$ contineri summa productorum ex singulis differentialibus quantitarum $A, B, C, D, \&c.$ in factum omnium quantitarum, exclusa illa, cujus est differentiale, una cum summa productorum ex omnibus ambis differentialium in factum omnium quantitarum, exclusis illis, quarum sunt differentialia ambi, & sic deinceps ex omnibus ternis, quaternis, quinternis, &c. usque ad factum omnium differentialium.

Fig. 18.

SCHOLION II.

Cum autem summae productorum ex omnibus ambis, ternis, quaternis, &c.
dif.

differentialium in facta respectiva quantitatatum assignabilium, juxta scholion praecedens, sint infinitesimae relate ad summam productorum ex singulis differentialibus in factum omnium quantitatatum assignabilium, exclusa illa, cujus est differentiale (positis tamen differentiis ejusdem ordinis); hinc summae illae relate ad hanc spernuntur. Verum aliquando evenit, ut summa haec sit nulla, & in hoc casu non erit spernenda summa productorum ex omnibus ambis &c.; & si haec pariter sit nulla, tunc non erit despicienda summa productorum ex omnibus ternis &c., & sic deinceps usque ad ultimum factum ex omnibus differentialibus. En exemplum, quo declaratur quomodo fieri possit, ut factum ex singulis differentialibus &c. sit nullum: latus B D quadrati A B minuaturs infinitesima quantitate B G; erit quadratum A B imminutum rectangulo infinitesimo H G ordinis G B: latus L G augeatur infinitesima quantitate G F aequali B G; rectangulum A G auctum erit rectangulo D F infinitesimo ordinis G F; sed rectan-

Fig. 17.

rectangulum $H G$ excedit rectangulum $G E$ quadrato $G B$ infinitesimo relate ad ipsa rectangula. Ergo differentia ordinis $G B$ evadit nulla, & remanet differentia ordinis duplo majoris $G B$. Verum haec clarius per analysim infinitesimorum comprehenduntur.

PROPOSITIO XX.

Potentiae eadem rectarum $A B$, $D C$, quae differunt quantitate infinitesima $L A$, & ipsae differunt quantitate infinitesima ejusdem ordinis; & vice-versa. Fig. 19.

Demonst. prima pars. Potentia rectae $A B$ est ad potentiam rectae $D C$, ut $B A$ ad unam M ex continue proportionalibus post $B A$, $D C$ in serie finita; ergo dividendo potentia $B A$ minus potentia $D C$ est ad potentiam $D C$, ut $B A$ minus M ad M . Sed $B A$ minus M est infinitesima ejusdem ordinis $L A$ (1). Ergo differentia potentiarum est infinitesima ejusdem ordinis. \mathcal{Q}
E. P. Pats

(1) per
 coroll. 3.
 prop. 2.

Pars secunda fere eodem modo demonstratur.

COROLLARIUM.

Hinc differentiae quadratorum, circulorum, cuborum, sphaerarum habentium radices, vel radios, qui differunt quantitate infinitesima, erunt & ipsae infinitesimae ejusdem ordinis.

SCHOLION.

Haec propositio applicari etiam potest polygonis similibus, quorum latera relative differunt quantitate infinitesima, tum ejusdem ordinis, tum diversorum; sed in hac ultima suppositione aliqua cautio est adhibenda; etenim ad evitandos paralogismos juvat recurrere ad quadrata totius peripheriae polygonorum, vel ad quadrata laterum, quae differunt quantitate infinitesima ordinis inferioris. Ratio hujus rei invenietur, si polygonum in triangula similia dividantur, & si reiterentur propositiones XIX. & XX. libri sexti

sexti Euclidis: & hîc rursus adverto non esse praecipitose ratiocinio concludendum, figuras, quae, spreris infinitesimis, habent aliquam proprietatem aliis communem, habere etiam omnes; sed prius videndum est, num differentiae illae infinitesimae turbent demonstrationes, quibus probatur unam ab alia profluere.

APPENDIX.

Quoniam rectae a vero parallelismo declinantes quantitate infinitesima, acceptae a minus cautis pro parallelis facilem viam sternant ad paralogismos; hinc proposuetam suppressere phrasim illam: *accipi possunt, ut parallelae*: contentus dumtaxat monuisse, recursum esse habendum ad doctrinam triangulorum expositam, ex qua pendet illa rectarum parallelarum, quando istarum proprietates examinandae occurrunt cum differentiis infinitesimis. Verum, ut clarius paralogismorum fontes adpareant, operae pretium duxi sequentia, in hac appendice, de rectis parallelis exponere.

F

Paral-

42

Fig. 20. Parallelismus rectarum $A X$, $D Y$ duas condiciones comprehendit. Prima est, quod in utramlibet partem, quantumvis productae nunquam concurrent. Altera est, quod distantiae duae, ubi vis, sumptae $A D$, $Z E$ aequales plane sint. Hinc omnes parallelarum proprietates ducuntur.

Declinabunt lineae rectae $A X$, $D Y$ a parallelismo infinite parum, si inclinetur $A X$ sic, ut transeat in $A T$, sitque angulus $X A T$ infinitesimus. Quo posito concurrent $A T$, $D T$ ad distantiam infinitam $E T$, & distantiae $A D$, $C E$ differunt differentia infinitesima $Z C$, five $A B$. Censebuntur autem $A T$, $D T$ habere utramque parallelismi conditionem: primam, quia ad nullam assignabilem distantiam concurrent: alteram, quia distantiae $A D$, $C E$ pro aequalibus, cum differentia sit infinitesima, haberi possunt.

In hoc autem illud excipe: si, sumpta $D R$ infinita, minori tamen, quam $D T$, notaretur distantia $V R$; differentia profecto inter $A D$, & $V R$ esset
affi-

assignabilis; neque profecto distantiae $A D$, $V R$ possent haberi pro aequalibus.

Quate donec intervallum $D E$ inter distantias $A D$, $C E$ erit assignabile, distantiae ipsae $A D$, $C E$ haberi poterunt pro aequalibus, & tractus $A C$, $D E$ servabunt alteram parallelismi conditionem; sed si intervallum $D R$ sit infinitum, quoniam distantiae $A D$, $V R$ nequaquam pro aequalibus haberi poterunt, tractus $A V$, $D R$ carebunt secunda conditione parallelismi, primam conditionem servabunt; est enim angulus T infinitesimus, ideoque distantia $R T$, ad quam concurrunt $A V$, $D R$, infinita sit oportet, si cum $R V$ comparatur. Igitur si lineas rectas parallelas ex prima conditione definias, erunt $A V$, $D R$ parallelae; si ex secunda, non erunt. Si qui autem de parallelismo restarum $A V$, $D R$ contendere velit, videat, ne quaestionem de nomine instituat.

Illud vero ad rem maxime pertinet. Rectae $A V$, $D R$ (sive parallelae dicantur, sive non) hoc certe habent,

F 2 quod

quod, ducta, ubi vis, GL , quae fecerit AV in G , DR in L , anguli alterni $D LG$, $L GT$ sunt aequales; nam, cum angulus $D LG$, ut externus, sit aequalis duobus internis, & oppositis $L GT$, $L TG$, sitque $L TG$ infinitesimus, potest $D LG$ aequalis censeretur angulo $L GT$. Habent ergo lineae rectae AV , DR hanc utique proprietatem, aliasque, quae maxime in parallelis celebrari solent; quaeque non ex aequalitate distantiarum AD , VR pendent, sed ex sola infinita parvitate anguli T .

Haec haecenus dixi ponens AB quidem infinitesimam, CB vero, & CE assignabiles. Videamus jam parallelismo quid fiat, si tres rectae AB , CB , CE ponantur vel omnes infinitesimae, vel tantum aliquae. Fortasse expedientur omnia quatuor Theorematis.

THEO-

THEOREMA I

SI sit AB infinitesima, tum respectu CB , tum respectu CE , tractus AC , DE habere censebuntur utramque parallelismi conditionem. Primam, quia, cum sit AB infinitesima respectu CB , erit infinitesimus angulus ACB ; ergo etiam angulus T ; ergo erit ET infinita respectu EC ; ergo AC , DE concurrent ad distantiam infinitam. Secundam, quia, cum AB infinitesima sit respectu CE , poterunt AD , CE haberi pro acqualibus.

SCHOLION.

Si sumpseris ER infinitam respectu EC , sed minorem, quam TE , ac notaveris distantiam RV ; tractus AV , DR habebunt primam conditionem parallelismi propter angulum infinitesimum T . Non habebunt secundam; nam, ut patet, non poterunt AD , VR sumi pro acqualibus.

SCHO-

Quamvis $A V$, $D R$ careant secunda conditione parallelismi, tamen si $G L$ secet $A V$ in G , $D R$ in L , erunt anguli alterni $G L D$, $L G T$ aequales; scilicet propter angulum infinitesimum T .

THEOREMA II.

SI sit $A B$ infinitesima respectu $C B$, non vero respectu $C E$; tractus $A C$, $D E$ habebunt primam conditionem parallelismi, non vero secundam. Habebunt primam, quia, cum sit $A B$ infinitesima respectu $C B$, erit angulus $A C B$ infinitesimus; ergo etiam angulus T erit infinitesimus; ergo erit $E T$ infinita respectu $E C$; ergo lineae $A C$, $D E$ concurrent ad distantiam infinitam. Non habebunt secundam, quia cum $A B$ non sit infinitesima respectu $C E$, non poterunt $A D$, $C E$ sumi pro aequalibus.

SCHO-

Ubi cumque tamen ducatur GL secans AT in G , DT in L , anguli alterni GLD , LGT erunt aequales propter angulum infinitesimum T .

THEOREMA III.

SI sit AB infinitesima respectu CE , non vero respectu CB ; tractus AC , DE carebunt prima conditione parallelismi; habebunt secundam &c.

Carebunt prima, quia cum AB non sit infinitesima respectu CB , angulus ACB erit assignabilis; ergo etiam angulus T ; ergo ET non erit infinita respectu EC ; ergo AC , DE non concurrent ad distantiam infinitam. Habebunt secundam, quia, cum sit AB infinitesima respectu CE , poterunt AD , CE haberi pro aequalibus.

SCHO-

Ubi cumque ducatur GL , ut supra, anguli alterni minime pro aequalibus haberi poterunt, cum sit angulus T assignabilis.

THEOREMA IV.

SI AB non sit infinitesima neque respectu CB , neque respectu CE ; tractus AC , DE neutram habebunt parallelismi conditionem.

Ac ducta GL , ut supra, anguli alterni minime sumi poterunt pro aequalibus.

Haec satis patent ex dictis.



A Fig. 18. S.

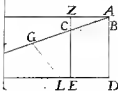
B X.

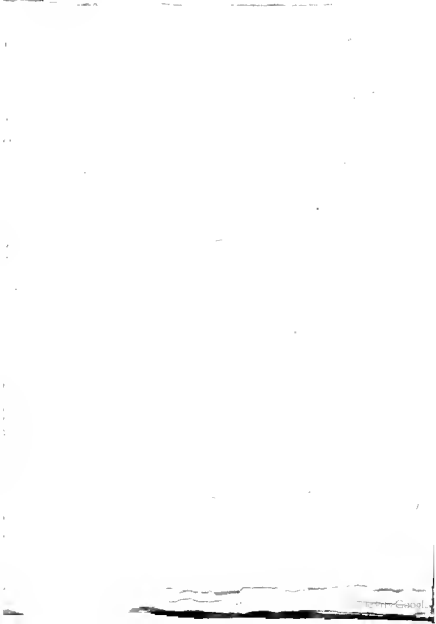
C Z.

A L B

D Fig. 19. C

M

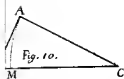
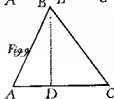
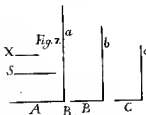
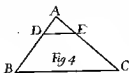


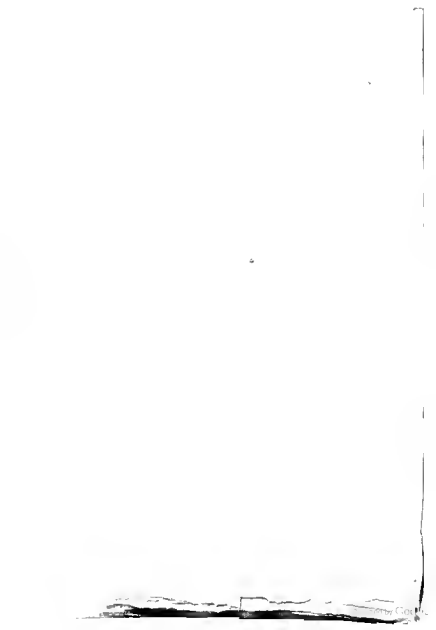


A

Fig. 2.

B





ELEMENTA
GEOMETRIAE
INFINITESIMORUM
LIBER SECUNDUS.



PROPOSITIO I.



IN circulo, posito arcu CM Fig. 1.
 infinitesimo cujuscunque ordi-
 nis, erunt tangens CS ,
 chorda CM , sinus rectus LM
 infinitesima ejusdem ordinis; pars SM
 secantis BS supra radium BM , & si-
 nus versus CL erunt infinitesima ordi-
 nis duplo majoris anguli CBM , seu
 arcus CM .

Demonst. prima pars. Cum arcus CM
 sit infinitesimus, erit angulus CBM
 infinitesimus ejusdem ordinis (1); sed
 anguli BCM , BMC , & BCS ,
 CSB sunt finiti; ergo SC , CM ,
 ML sunt infinitesima ejusdem ordinis
 anguli CBM , seu arcus CM relate
 ad diametrum finitam CB (2). *Q. E. P.*

Demonst. secunda pars. In triangulo
 rectangulo BCS , quia angulus CBS
 est infinitesimus, erit MS ordinis du-
 plo majoris tangentis CS (3), seu ar-
 cus CM ; ergo quia LM parallela est
 CS ,

(1) per
 5. prop.
 lib. 1.

(2) per
 prop. 9.
 cor. 10.
 lib. 1.

(3) per
 prop. 9.
 lib. 1.

$G 2$

$C S,$

52
C S, erit C L infinitesima ordinis duplo majoris arcus C M. *Q. E. S.*

COROLLARIUM.

B M est ad B L, ut M S est ad C L; dividendo C L est ad L B, ut M S — C L est ad C L; sed C L est infinitesima ordinis duplo majoris arcus C M; ergo differentia inter M S, & C L est ordinis duplo majoris ordinis rectae C L, seu quadruplo majoris arcus C M.

SCHOLION.

Claritatis gratia in decursu hujus libri suppono arcum C M esse infinitesimum primi ordinis, licet demonstrationes extendi possint ad ordines superiores, ut attendenti patebit.

PRO-

PROPOSITIO II.

IN circulo, posito arcu $M N$ infinitesim- Fig. 2.
mo primi ordinis, segmentum $M X N$
terminatum ab arcu $M X N$, & ejus
chorda $M F N$, & trilineum $M X N C$
terminatum ab arcu $M X N$, tangente
 $M C$, & intercepra $C N$, erunt infinitesima
tertii ordinis.

Demonst. prima pars. Ex centro S
ducatur $S F X$ normalis ad $M N$, con-
jungantur $M X$, $X N$; erit $F X$ secundi
ordinis infinitesimorum (1). Ergo rectan-
gulum $M N$ in $F X$ erit infinitesimum
tertii ordinis (2); sed segmenrum $M X N F$
mediat inter rectangulum $M N$ in $F X$,
& rriangulum $M X N$, seu dimidium
praedicti rectanguli. Igitur, cum rectan-
gulum $M N$ in $F X$, & ejus dimidium
 $M X N$ sint infinitesima tertii ordinis,
erit etiam segmentum $M X N F$ & ipsum
infinitesimum tertii ordinis. *Q. E. P.*

(1) per
primam
proposi-
tionem.
(2) per
prop. 4.
lib. 1.

Demonst. secunda pars. Ex puncto N
ducatur rangens LN ; erunt $M L$, LN
aequales; similiter $L N$, & $L C$ non
dif-

differunt nisi quantitate infinitesima respective; nam in triangulo rectangulo LNC angulus NLC est infinitesimus; ergo etiam LC non differt ab LM nisi quantitate infinitesima respective; ac proinde triangula CMN , LNC sunt ejusdem ordinis; sed triangulum MNC est infinitesimum secundi ordinis relate ad triangulum CMS , seu-infinitesimum tertii relate ad quantitatem assignabilem. Ergo triangulum NLC est infinitesimum tertii ordinis: cum autem trilineum $MXNC$ mediet inter triangulum MCN , & triangulum LCN , erit & ipsum infinitesimum tertii ordinis. *Q. E. S.*

PROPOSITIO III.

Fig. 3. **I**N circulo, posito arcu NM infinitesimo primi ordinis, tangens MC , arcus MN , chorda MN , sinus rectus GN differunt quantitate infinitesima tertii ordinis.

Demonst. Tangens MC , arcus MN ,
chor-

chorda MN sunt, ut triangulum MSC ,
 sector circuli MSN , & quadrilate-
 rum $SMXN$; sed ista differunt quan-
 titate infinitesima tertii ordinis unam tri-
 lineum MXN , & segmenta MX ,
 XN sunt infinitesima tertii ordinis (1). (1) per
 Ergo & illa differunt quantitate infinite- 2. prop.
 sima tertii ordinis; cum omnes termini
 tam in prima, quam in secunda serie
 sint infinitesimi primi. Quod chorda MN
 excedat sinum rectum NG infinitesima
 quantitate tertii ordinis patet (2). Q. E. D. (2) prop.
 9. lib. I.

PROPOSITIO IV.

IN Triangulo ABC obtusangulo, Fig. 4.
 in quo duo anguli A , & C sunt in-
 finitesimi, erunt latera AB , BC in
 ratione angulorum oppositorum.

Demonst. Per punctum C ducatur CL
 parallela ad AB , quæ concutrat cum
 BS (normali ex angulo obtuso B ad
 rectam AC) producta in L , & centro
 C intervallo CS describatur arcus MSN .
 Recta AB est ad rectam BC , ut AS
 est

(1) *prop.* est ad SC (1), seu ut BS est ad SL ,
 9. *lib. I.* seu ut arcus SM est ad arcum SN (2),
 (2) *per* seu ut angulus $B C A$ est ad angulum
 3. *prop.* $A C L$, seu ut angulus $B C A$ est ad
 angulum $A. Q. E. D.$

COROLLARIUM I.

Hinc duo triangula rectangula ASB ,
 CSB , quae habent eandem altitudinem,
 & angulum isti oppositum infinitesimum,
 habent etiam bases AS , SC ; ac pro-
 inde hypotenusas AB , BC in ratio-
 ne reciproca angulorum infinitesimorum.

COROLLARIUM II.

Fig. 5. Quin immo si duo triangula ALM ,
 6. 7. 8. OBC habeant duo latera AL , BO
 aequalia, angulos ALM , OBC cir-
 cumjacentes lateribus AL , BO habe-
 ant similiter aequales, & angulos M ,
 & C praedictis lateribus oppositos ha-
 beant infinitesimos; habent etiam latera
 LM , CB , & AM , OC in ratione
 reciproca angulorum infinitesimorum.
 Etc-

Etenim ex punctis A , & O ducantur normales AQ , OP ad rectas LM , CB productas, si opus est; cum anguli MLA , CBO sint aequales, & anguli Q , & P sint recti, erunt etiam aequales anguli LAQ , BOP ; adeoque in triangulis QAL , BOP , cum sint etiam rectæ AL , BO aequales, erunt etiam aequales normales AQ , OP ; hinc latera AM , OC , & QM , PC sunt in ratione reciproca angulorum infinitesimorum M , & C ; sed QM non differt ab LM , PC non differt a BC ; ergo etiam LM , BC sunt in ratione reciproca angulorum infinitesimorum M , & C .

SCHOLIUM.

Advertendum est hanc propositionem cum suis corollariis verificari, speris nonnullis differentiis infinitesimis, non vero absolute.

H

PRO-

PROPOSITIO. V.

Fig. 3. **P**ositis, quae supra posuimus propositione tertia, differentia sinus recti GN a chorda MN non differt a quarta parte differentiae sinus. recti GN a tangente MC .

Demonst. Ex puncto N ducatur NR normalis ad tangentem MC , erit RC differentia sinus recti a tangente: tum centro M intervallo MN abscindatur MQ a tangente MC , erit RQ differentia sinus recti a chorda. Cum SM sit ad MC , ut NR ad RC , erit rectangulum SM in RC aequale rectangulo. MC in: RN : similiter cum, $MQ \div MR$ sit ad RN , ut RN ad RQ , & $MQ \div MR$ non differat a $2MR$, seu a recta ON , hinc ratio ON ad NR non differt a ratione NR ad RQ : sed ratio ON ad NR , seu ad GM , eadem est, ac ratio $2GA$ ad GN , seu MR . Ergo ratio $2GA$ ad MR non differt a ratione NR ad RQ : sed ratio $2GA$ ad MR non differt a
ratio-

ratione 2 MA ad MR , & ratio 2 MA ad MR non differt a ratione 2 MA ad MC . Ergo ratio 2 MA ad MC non differt a ratione RN ad RQ ; adeoque rectangulum 2 MA in RQ non differt a rectangulo MC in RN , seu a rectangulo SM in RC , & per consequens 2 MA est ad MS , ut RC ad RQ ; sed MS est quarta pars 2 MA . Ergo RQ non differt a quarta parte RC . *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Hinc differentia sinus recti GN a chorda MN non differt a tercia parte differentiae chordae MN a tangente MC .

PROPOSITIO VI.

SIt $AOSM$ quadrans circuli CML , Fig. 7.
in radio AO sumantur duo puncta
 P, Q , per quae ducantur duae ordinatae
normales ad AO , & intercipientes
H 2 ar-

arcum MN infinitesimum primi ordinis, differtum ab extremitatibus quadrantis AS arcibus finitis MA , NS ; dico differentiam abscissarum AP , AQ , & ordinararum PM , QN esse quantitatem infinitesimam primi ordinis.

Demonst. Ordinata NQ producaturs usquedum concurrat cum circulo in L , & ex puncto M ducatur MG parallela ad radium AO , quæ producaturs usquedum concurrat cum circulo in C ; erit PQ , seu GM differentia abscissarum AP , AQ , & GN erit differentia ordinararum PM , QN . Cum ex hypothefi arcus NS , MA sint finiri, erunt etiam arcus CN , LM finiti; hinc anguli CMN , LMN sunt finiti; adeoque in triangulo rectangulo MGN omnes anguli sunt finiri, & per consequens latera MN , MG , GN sunt ejusdem ordinis (1); sed arcus MN , ac proinde chorda MN est infinitesima primi ordinis per suppositionem. Ergo etiam latera MG , GN , seu differentia ordinararum, & abscissarum erit infinitesima primi ordinis. *Q. E. D.*

(1) per
corol. 3.
prop. 6.
lib. 1.

CO-

COROLLARIUM.

Si arcus NS sit infinitesimus, erit arcus MS infinitesimus primi ordinis; ac proinde arcus CS cum arcu NS , seu arcus CN erit infinitesimus primi ordinis; hinc angulus CMN erit infinitesimus primi ordinis; adeoque GN respectu NM erit infinitesima primi ordinis (1); sed NM est infinitesima primi ordinis; ergo GN erit infinitesima secundi ordinis. Si vero arcus MA sit infinitesimus, erit arcus AN , ac proinde arcus LA infinitesimus primi ordinis; adeoque etiam arcus LM , & per consequens angulus LMN erit infinitesimus primi ordinis; ergo GM respectu MN erit infinitesima primi ordinis (2); sed MN est infinitesima primi ordinis; ergo GM erit infinitesima secundi ordinis.

(1) per
9. prop.
lib. 1.

(2) per
9. prop.
lib. 1.

PRO-

PROPOSITIO VII.

Fig. 10. **S**It MS arcus circuli LMN infinitesimus primi ordinis, cui subistendatur chorda MS ; per punctum M ducatur MR tangens circulum, & per punctum S ducatur utcumque recta NS secans circulum extra arcum infinitesimum MS , & concurrens cum tangente MR ; dico -angulum MSR factum a chorda MS cum secante NS producta vel esse infinitum, vel infinitesimum primi ordinis; angulum NRM factum a secante NR , & tangente MR vel esse finitum, vel infinitesimum cujuscunque ordinis; ac tandem angulum SMR factum a chorda SM , & tangente MR esse infinitesimum primi ordinis.

Demonst. prima pars. Tota peripheria circuli est mensura duorum rectorum ad peripheriam ipsam; cum igitur arcus NAM sit mensura anguli NSM , seu duorum SMR , SRM , erit arcus NSM mensura anguli MSR ; sed arcus NSM vel est finitus, vel infi-

infinitesimus primi ordinis; quia ad minimum semper remanet arcus $M S$ infinitesimus primi ordinis; ergo angulus $M S R$ vel erit finitus, vel infinitesimus primi ordinis. *Q. E. P.*

Demonst. secunda pars. Ex arcu $N M$ abscindatur arcus $N X$ aequalis $M S$, & jungantur puncta X, S ; erit angulus $N S X$ aequalis angulo $S M R$; cum igitur arcus $N M$ sit mensura duorum angulorum $S M R, S R M$, & arcus $N X$ sit mensura anguli $N S X$, seu $S M R$; erit arcus $X M$ mensura anguli $N R M$; sed arcus $X M$ potest esse finitus, & infinitesimus cujuscunque ordinis; ergo angulus $N R M$ potest esse finitus, & infinitesimus cujuscunque ordinis. *Q. E. S.*

Pars tertia patet; cum arcus $M S$ infinitesimus primi ordinis sit mensura anguli $S M R$.

COROLLARIUM.

Cum arcus $X A M, N S M$ sint mensura angulorum $M R S, M S R$; hinc
si ar-

si arcus XAM , & NSM sint finiti, & aequales, erunt etiam anguli MRS , MSR aequales: si vero sunt finiti, sed differunt quantitate infinitesima; & tunc anguli MRS , MRS sunt pariter finiti, & differunt quantitate infinitesima: vel tandem arcus sunt finiti, sed differunt quantitate finita; & tunc anguli MRS , MSR sunt finiti, & eorum differentia erit finita, hoc est unus erit obtusus. In prima suppositione SR intercepta inter circulum, & tangentem erit secundi ordinis, & differentia inter MS , MR erit absolute nulla; in secunda suppositione intercepta SR erit secundi ordinis, & differentia inter MS , MR potest esse cujuscunque ordinis incipiendo a tertio; in tertia tandem suppositione intercepta SR erit secundi ordinis, & differentia inter MS , MR erit similiter secundi ordinis: quod totum patet ex scholio propositionis XII. Lib. primi. Si vero arcus XAM , vel NSM sunt infinitesimi primi ordinis, erit angulus MRS , vel MSR infinitesimus primi ordinis; hinc SR , SM ,
 MR

M R in hac suppositione erunt infinitesimae primi ordinis, & differentia inter M S, & M R erit ejusdem ordinis (1). Si tandem arcus X A M sit infinitesimus ordinis superioris, erit angulus R infinitesimus ordinis superioris; adeoque S R respectu S M potest esse infinitesima cujuscunque ordinis (2).

(1) *prop.*
13. *lib.*
1.

(2) *per*
prop. 13.
lib. 1.

PROPOSITIO VIII.

SIt quadrans circuli A B C, ducanturque ordinatae P M, Q N productae usquedum concurrant cum circulo in T, & S, quaeque intercipient arcum M N infinitesimum primi ordinis; tum per punctum M ducatur tangens M O, quae concurrat cum Q N producta in O. Si arcus A M, N C sunt finiti, vel si arcus A M est infinitesimus cujuscunque ordinis superioris, incipiendo a secundo (ducta ex M normali M R ad Q O); ratio Q O ad O R non differt a ratione Q N ad N R: si vero arcus N C sit infinitesimus cujuscunque

Fig. 17.

I

or-

ordinis, vel $A M$ sit primi, tunc ratio $Q O$ ad $O R$ differt a ratione $Q N$ ad $N R$.

Demonst. prima pars. Si arcus $A M$; $N C$ sunt finiti, erunt etiam finiti arcus $T A M$, $S N M$; hinc cum arcus $T A M$ sit mensura anguli $S O M$, & arcus $S N M$ sit mensura anguli $M N O$, erunt etiam finiti anguli $M O N$, $M N O$; igitur cum angulus $N M O$ sit infinitesimus primi ordinis, erit intercepta $N O$ infinitesima secundi ordinis (1); sed $R N$ est infinitesima primi ordinis (2); ergo $Q N$ non differt a $Q O$, neque $R N$ differt ab $R O$; & per consequens ratio $Q O$ ad $R O$ non differt a ratione $Q N$ ad $N R$ (3). *Q. E. P.*

Demonst. secunda pars. Quoniam arcus $A M$ est infinitesimus cujuscunque ordinis superioris, incipiendo a secundo, erit recta $P M$ infinitesima ejusdem ordinis (4); sed $Q N$ est infinitesima primi ordinis per suppositionem; ergo $P M$, seu $Q R$ est infinitesima respectu $R N$; adeoque ratio $Q N$ ad $N R$ non differt a ratione aequalitatis; & multo magis

(1) per
def. vi.
nam tri.
angulo-
rum lib.
1.

(2) per
6. prop.

(3) per
prop. 1.
lib. 1.

(4) per
3. prop.

gis

gis non differt a ratione aequalitatis ratio QO ad OR ; adeoque ratio QO ad OR non differt a ratione QN ad NR . *Q. E. S.*

Demonst. tertia pars. Si arcus NC est infinitesimus cujuscunque ordinis, erunt arcus TAM , SNM finiti, ac proinde erunt etiam finiti anguli MON , ONM ; hinc NO erit infinitesima secundi ordinis (1); sed RN est pariter infinitesima secundi ordinis (2); ergo ratio QO ad OR differt a ratione QN ad NR . *Q. E. T.*

(1) per
differen-
tiam tri-
angulo-
rum lib.
1.

(2) per
coroll.
prop. 6.

Demonst. quarta pars. Si tandem arcus AM est infinitesimus primi ordinis, erit NO infinitesima primi ordinis (3); sed RN est infinitesima primi ordinis (4). Ergo RN , NO sunt infinitesimae ejusdem ordinis; & per consequens ratio QO ad OR differt a ratione QN ad NR . *Q. E. Q.*

(3) per
coroll.
prop. 7.
(4) per
6. prop.

COROLLARIUM.

Si arcus NC sit infinitesimus cujuscunque ordinis, erunt rectae RN , RO

I 2

in-

(1) per
coroll.
prop. 6.
7.

infinitesimae secundi ordinis (1), & R M infinitesima primi ordinis, tandem Q N, Q O. erunt finitae. Ergo quarta proportionalis post N R, N Q, R M; vel post O R, O Q, R M erit infinita. Si arcus A M sit infinitesimus primi ordinis, erit R M secundi ordinis; Q N, N R, & R O, Q O sunt infinitesimae primi ordinis (2). Ergo quarta proportionalis post Q N, N R, R M, vel post Q O, O R, R M erit infinitesima secundi ordinis.

(2) per
coroll.
prop. 6.

PROPOSITIO. IX.

Fig. 11.

POSITIS, quae supra posuimus. propositione praecedenti, dico triangulum M R N sumi posse pro triangulo M R O ad determinandam subtangentem circuli.

Demonst. Si arcus A M, & N C sunt finiti, vel si arcus A M sit infinitesimus cujuscunque ordinis superioris, incipiendo a secundo, tunc ratio Q N ad N R non differt a ratione Q O ad O R. (3); adeoque quarta proportionalis, post R N, Q N.

(3) per
8. prop.

$Q N$, $R M$ non differt a quarta proportionali post $Q O$, $O R$, $R M$, hoc est, non differt a subtangente. Si vero arcus $N C$ sit infinitesimus cujuscunque ordinis, vel $A M$ sit primi, cum quarta proportionalis in primo casu sit infinita, & in secundo casu infinitesima secundi ordinis, quodcunque ex illis duobus triangulis sumatur; hinc patet &c. *Q. E. D.*

SCHOLION.

In ultima suppositione, licet quarta proportionalis inventa per triangulum $N R M$ sit infinita, aut infinitesima, quemadmodum etiam subtangens, attamen in se multum discrepant; quod sequenti exemplo demonstro. Sit quadrans circuli $V Q N M$, in radio $V Q$ sumatur $Q P$ infinitesima primi ordinis, cum per punctum P ducatur $P M$ parallela ad $Q N$, per punctum M ducatur tangens $X M T$, quae cum $Q N$ producta concurrat in T , & cum $Q V$ producta concurrat in X ; deinde ducatur chorda $N M$, quae concurrat cum $Q V$ producta

Fig. 12.

ita in S; tandem per punctum M ducatur M R parallela ad Q V. Est proprietas circuli notissima, quod angulus R M N aequalis sit angulo N M T, ac proinde ratio T M ad R M eadem est, ac ratio T N ad N R; sed ratio T M ad M R non differt a ratione aequalitatis (1). Ergo ratio T N ad N R non differt a ratione aequalitatis; ac proinde recta R N non differt a dimidio rectae R T. Praeterea in triangulo QNS erit Q S ad R M, ut Q N ad N R; ac proinde rectangulum Q S in R N est aequale rectangulo Q N in R M: similiter rectangulum Q X in R T est aequale rectangulo Q T in R M; sed rectangulum Q N in R M non differt a rectangulo Q T in R M. Ergo etiam rectangulum Q S in R N non differt a rectangulo Q X in R T; & per consequens ratio R N ad R T non differt a ratione Q X ad Q S; sed R N non differt a dimidia parte rectae R T. Ergo etiam Q X non differt a dimidia parte rectae Q S; sed Q X est vera subtangens. Ergo in hac suppositione, vera subtan-

(1) per
3. prop.

71

rangens, licet infinita, tamen est dimidia
 subtangente suppositae QS . Quod ani-
 madversione dignum est.

PROPOSITIO X.

IN arcu FL infinitesimo primi ordinis Fig. 13.
 sumatur arcus PQ infinitesimus cu-
 juscunque ordinis superioris, tum per L
 ducatur LX tangens circulum, & per
 puncta P , & Q ducantur normales PE ,
 QK ad diametrum BAC , quae ex
 chorda FL abscindant partem MN , &
 productae in X , & Z abscindant XZ
 ex tangente LX ; oportet determinare
 differentiam chordae PQ a recta MN ,
 tum differentiam ejusdem chordae PQ
 a recta XZ .

Const. Per punctum Q ducatur QO
 parallela ad rectam FL , quae producta
 concurrat cum EP producta similiter in
 O ; per punctum vero X ducatur XR
 parallela ad rectam PQ , quae concu-
 rat cum KQ producta in R ; efformata
 jam erunt duo triangula PQO , XZR ,
cx

ex quorum determinatione dependet solutio problematis: nam ex determinatione trianguli PQO eruitur differentia inter rectas PQ , QO , seu inter rectas PQ , MN ; ex determinatione trianguli XRZ eruitur differentia inter rectas XZ , XR , seu inter rectas XZ , PQ . Determinationes autem triangulorum PQO , XZR dependent in primis ex ordine rectae PQ , seu XR , tum ex determinatione angulorum PQO , ZXR , hoc est, ex angulo aberrationis rectae PQ a parallelismo cum recta FL , & ex angulo aberrationis ejusdem rectae PQ a parallelismo cum tangente LX ; tandem dependent ex determinatione angulorum OPQ , XRZ , seu anguli PQY , seu arcus PY . *Q. E. F.*

COROLLARIUM.

Sit arcus PQ infinitesimus secundi ordinis, erit similiter chorda PQ infinitesima secundi ordinis (1); arcus PF sit absolute nullus, & in hac suppositione punctum P coincidit cum puncto F ,
ac

(1) per
2. prop.

ac proinde ob parallelismum rectarum QO , FL efformatur angulus LFQ aequalis angulo PQO ; sed angulus LFQ est infinitesimus primi ordinis, quia insistit arcui QL infinitesimo primi ordinis. Ergo etiam angulus PQO erit infinitesimus primi ordinis. In hisce determinationibus, vel arcus PY erit infinitesimus secundi ordinis, (nam ad minimum semper remanet arcus PQ infinitesimus secundi ordinis, ac proinde evanescente arcu PB remanet BY infinitesimus secundi ordinis); vel arcus PY est infinitesimus primi ordinis, vel est finitus, sed minor semicirculo quantitate finita, vel minor semicirculo quantitate infinitesima, vel aequalis perfecte semicirculo, vel major quantitate infinitesima, vel major quantitate finita, vel discrepans a circulo quantitate infinitesima primi ordinis, vel quantitate infinitesima secundi ordinis; & tunc angulus PQY , seu OPQ , vel erit infinitesimus secundi ordinis, vel erit infinitesimus primi ordinis, vel erit finitus, & acutus, vel finitus, & rectus,

K

vel

vel finitus, & obrusus discrepans a recto, quantitate infinitesima, vel obrusus discrepans a recto quantitate finita, vel obrusus discrepans a duobus rectis quantitate infinitesima primi ordinis, vel obrusus minor duobus rectis quantitate infinitesima secundi ordinis; in omnibus hisce casibus facile est determinare per doctrinam triangulorum expositam in primo libro differentiam inter PQ & OQ , seu MN . Eadem est methodus, si arcus FP sit infinitesimus cujuscunque ordinis, quemadmodum, etiam arcus PQ sit infinitesimus cujuscunque ordinis. Quidquid dictum est de hoc triangulo PQO , idem dicito de triangulo XZR , quod inservit ad determinandam differentiam inter rectas XZ , XR , seu PQ .

PROPOSITIO XI.

Fig. 14.

Sit CD arcus circuli infinitesimus primi ordinis, in quo sumatur arcus NM infinitesimus, cujuscunque ordinis
super-

superioris; per punctum D ducatur DB tangens circum, tum ex centro A per puncta M, & N ducantur rectae ANB, AMZ, quae ex chorda CD abscindant partem PQ, ex tangente vero DB abscindant partem BZ. Oportet determinare differentiam inter chordam MN, & rectam PQ, tum differentiam inter eandem chordam MN, & rectam BZ.

Const. Ex punctis Z, & P ducantur ZX, PO parallelae ad chordam MN; efformata jam erunt duo triangula PQO, XZB; ex determinatione primi trianguli eruitur differentia inter PQ, & PO, ex determinatione secundi trianguli eruitur differentia inter rectas BZ, & ZX: differentia vero inter rectas PO, & MN, inter MN, & ZX facile erui potest ex interceptis MP, & MZ; cum PO, MN, ZX sint parallelae. Q. E. F.

Facile dignosci potest differentiam inter rectas $M N$, $P Q$, & inter rectas $M N$, $B Z$ esse semper infinitesimam respective ad ipsas; nam $P Q$ non potest differre a $P O$ nisi per quantitatem infinitesimam respectivam, cum angulus $Q P O$ sit semper infinitesimus, & anguli $P O Q$, $O Q P$ sint semper finiti; similiter $P O$ non potest differe ab $M N$ nisi quantitate infinitesima respective, nam intercepta $P M$ semper esse debet infinitesima. Idem dicito de rectis $M N$, $X Z$, & $B Z$.

PROPOSITIO XII.

Fig. 15. **S**It $E B$ arcus circuli infinitesimus primi ordinis, $E B$ sit ejus chorda, $E N$ sinus rectus; dico segmentum sphaericum EBF genitum ab arcu $E B$, dum semicirculus $D E B$ rotatur circa diametrum $D B$, non differe a cono sexquialtero coni $E B F$ geniti in eadem rota-

rotatione a triangulo rectangulo ENB ,
nisi quantitate infinitesima sexti ordinis.

Demonst. Segmentum sphaericum EBF
aequatur cono, cujus basis est circulus
radii NE , altitudo vero est NO com-
posita ex intercepta NB , & BO quar-
ra proportionali post rectas ND , CD ,
 NB , per theoremata Archimedis; sed
 CD non differt a dimidia ND , nisi
quantitate infinitesima secundi ordinis,
nam DB non differt a DN , nisi quan-
titate NB infinitesima secundi ordinis.
Ergo pariter dimidia DB , seu DC
non differt a dimidia ND , nisi quan-
titate infinitesima secundi ordinis; adeo-
que BO non differt a dimidia NB ni-
si quantitate infinitesima secundi ordi-
nis respectu, ac proinde NO non
differt a parte sexquialtera rectae NB ,
nisi quantitate finitissima secundi ordi-
nis respectu; sed coni EBF , EOF ,
qui habent pro basi eundem circulum
radii NE , sunt ut altitudines NB , NO ;
ergo etiam conus EOF non differt a
parte sexquialtera coni EBF nisi
quantitate infinitesima secundi ordinis
respectu.

(1) per
prop. 3.
lib. 1.

respective; sed coni $E O F$, $E B F$ sunt infinitesimi quarti ordinis (1); nam bases, & altitudines horum conorum sunt infinitesimae secundi ordinis; ergo differentia coni $E O F$ a parte sexquialtera coni $E B F$ est infinitesima sexti ordinis. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Hinc ratio segmenti sphaerici $E B F$ ad conum, cujus basis est circulus radii $E N$, altitudo vero intercepta $N B$, non differt a ratione, quae intercedit inter tria, & duo.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 16. **S**IT $A B$ arcus circuli infinitesimus primi ordinis, $A C$ sit sinus rectus, $A B$ sit chorda, $F B$ sit sinus totus, $M B$ sit tangens, $F A M$ sit secans ejusdem arcus; tum semicirculus $B A L$ concipiatur rotari circa diametrum $B F L$; dico circulum genitum a tangente $M B$,
seg-

segmentum superficiei sphaericae genitum ab arcu AB , & circulum genitum a sinu recto AC differre inter se quantitate infinitesima quarti ordinis; dico secundo conum genitum a triangulo rectangulo MBF , sectorem sphaericum $AFDB$, & conum genitum a triangulo rectangulo AFC differre inter se quantitate infinitesima quarti ordinis.

Demonst. prima pars. Circulus, cujus radius est tangens MB , segmentum superficiei sphaericae ABD , seu circulus, cujus radius est chorda AB per theoremata Archimedis, & circulus, cujus radius est sinus rectus AC sunt, ut quadrata rangenris MB , chordae AB , & sinus recti AC ; sed rangens MB , chorda AB , sinus rectus AC differunt quantitate infinitesima tertii ordinis (1), hoc est, secundi ordinis respective ad ipsas, cum sint infinitesimae primi ordinis (2). Ergo etiam quadrata MB , AB , AC differunt quantitate infinitesima secundi ordinis respective (3), ac proinde etiam circuli, quorum radii sunt tangens MB , chorda AB , & sinus

(1) per
prop. 3.

(2) per
1. prop.

(3) per
prop. 20.
lib. 1.

(1) *corol.*
1. *prop.*
20. *lib.*
X.

sinus rectus $A C$, differunt quantitate infinitesima secundi ordinis respective (1); sed isti circuli ex eo quia habent radium infinitesimum primi ordinis sunt infinitesimi secundi ordinis. Ergo eorum differentia erit quarti ordinis. *Q. E. P.*

(2) *per*
1. *part.*
hujus.

Demonst. secunda pars. Conus genitus a triangulo rectangulo $M F B$ est ad sectorem sphæricum $F A B D$, ut circulus, cujus radius est tangens $B M$, est ad circulum, cujus radius est chorda $B A$; sed isti circuli differunt quantitate infinitesima quarti ordinis (2), hoc est, secundi ordinis respective; ergo etiam conus $M F N$, & sector sphæricus $A F D$ differunt quantitate infinitesima secundi ordinis respective; sed conus $M F N$, & sector sphæricus $A F D$ sunt infinitesimi secundi ordinis. Ergo eorum differentia erit quarti ordinis. Quod differentia inter sectorem sphæricum $A B D F$, & conum genitum a triangulo rectangulo $A C F$ sit infinitesima quarti ordinis patet ex præcedenti propositione. *Q. E. S.*

PRO-

PROPOSITIO XIV.

Positis, quae supra posuimus propositione praecedenti, dico differentiam circuli, cujus radius est sinus rectus MB , a circulo, cujus radius est chorda MA , non differre a quarta parte differentiae ejusdem circuli sinus recti MB a circulo, cujus radius est tangens OA . Fig. 17.

Demonst. Ex puncto M ducatur MS parallela ad CA ; erit SO differentia sinus recti MB a tangente AO ; tum centro A , intervallo chorda AM abscindatur ex tangente AO pars AX aequalis chordae AM ; erit SX differentia sinus recti MB a chorda MA . Circulus, cujus radius est chorda MA , seu AX , est ad circulum, cujus radius est sinus rectus MB , ut quadratum XA est ad quadratum MB ; ergo dividendo, differentia circuli radii XA a circulo sinus recti MB est ad eundem circulum sinus recti MB , ut bisrectangulum XS in SA cum quadrato XS est ad quadratum MB : similiter circulus sinus
L recti

recti MB est ad circulum tangentis OA , ut quadratum MB ad quadratum OA ; ac proinde circulus sinus recti MB est ad differentiam ejusdem circuli MB a circulo tangentis OA , ut quadratum MB est ad bisrectangulum. AS in SO cum quadrato SO . Ergo ex aequo differentia circuli sinus recti MB a circulo chordae AM est ad differentiam circuli ejusdem sinus recti MB a circulo tangentis OA , ut bisrectangulum AS in SX cum quadrato SX est ad bisrectangulum AS in SO cum quadrato SO , seu ut rectangulum AS in SX est ad rectangulum AS in SO ; nam XS , & SO sunt infinitesimae respectu SA (1). Ergo praedictae differentiae sunt ut XS , & SO ; sed XS non differt a quarta parte rectae SO (2). Ergo differentia circuli sinus recti MB a circulo chordae MA est ad differentiam ejusdem circuli sinus recti MB a circulo tangentis OA , ut unum ad quatuor, spectis tamen quantitativis infinitesimis respectivis. *Q. E. D.*

(1) per
3. prop.

(2) per
3. prop.

COROLLARIUM.

Differentia igitur circuli sinus recti MB a circulo chordae MA , seu a superficie segmenti sphaerici MAN non differt a tertia parte differentiae segmenti superficiei sphaericae MAN a circulo tangentis OA .

PROPOSITIO XV.

Iisdem positis, differentia superficiei sphaericae MAN a circulo sinus recti MB non differt a duplo differentiae ejusdem circuli sinus recti MB a superficie conii geniti a triangulo rectangulo $MB A$, exclusa basi. Fig. 18.

Demonst. Centro M , intervallo sinu recto MB abscindatur a chorda MA pars MT aequalis MB ; rum inter AM , TM inveniatur media proportionalis MI . Superficies segmenti sphaerici aequatur circulo, cujus radius est chorda MA ; superficies conii MAN , exclusa basi, aequatur circulo, cujus radius est

 L 2

 $M I$

MI media proportionalis, inter chordam MA , & sinum rectum MB , per theorema Archimedis. Ergo superficies segmenti sphaerici MAN est ad circulum sinus recti MB , ut quadratum MA est ad quadratum MB ; ac proinde dividendo, differentia superficiei sphaericae MAN a circulo MB est ad circulum MB , ut bisrectangulum MT in TA cum quadrato TA est ad quadratum MB . Similiter circulus MB est ad superficiem conii MAN , exclusa basi, ut quadratum MB est ad quadratum MI ; ac proinde circulus MB est ad differentiam ejusdem circuli MB a circulo MI , ut quadratum MB est ad bisrectangulum MT in TI cum quadrato TI ; adeoque ex aequo praedictae differentiae sunt, ut rectangula MTA , MTI , seu, ut TA , TI ; sed TA non differt a dupla TI (1). Ergo differentia superficiei sphaericae MAN a circulo sinus recti MB non differt a duplo differentiae superficiei conii MAN , exclusa basi, ab eodem circulo sinus recti MB .
Q. E. D.

(1) per
 coroll. 1.
 prop. 2.
 lib. 1.

COROL.

COROLLARIUM.

Si igitur differentia circuli sinus recti
 MB a superficie con i MAN , exclusa
 basi, sit *unum*, erit differentia ejusdem
 circuli MB a superficie sphaerica MAN
duo, differentia superficiei sphaericae
 MAN a circulo tangentis erit *sex* (1),
 tandem differentia circuli sinus recti
 MB a circulo tangentis erit *octo* (2).

(1) per
 coroll.
 prop. 14.
 (2) per
 14 prop.

PROPOSITIO XVI.

Iisdem positis, differentia con i $OC P$, Fig. 19.
 geniti a triangulo rectangulo CAO ,
 a sectore sphaerico MCN non differt
 a differentia ejusdem sectoris sphaerici
 MCN a cono MCN , genito a trian-
 gulo rectangulo MCB .

Demonst. Sector sphaericus MCN
 aequatur cono, cujus altitudo est radius
 CA , basis vero est circulus chordae
 MA . Cum igitur conus $OC P$, sector
 sphaericus MCN , seu conus altitudi-
 nis CA , basis. circuli MA , & soli-
 dum.

dum constat ex duobus conis MCN ,
 MAN habeant eandem altitudinem
 CA , sunt; ut circuli tangentis OA ,
 chordae MA , & sinus recti MB ; ac
 proinde differentiae illorum conorum
 sunt, ut differentiae istorum circularum;
 sed differentia circuli tangentis OA a
 circulo chordae MA non differt a tri-
 plo differentiae circuli chordae MA a
 circulo sinus recti MB (1). Ergo dif-
 ferentia cono OCN a sectore sphacri-
 co MCN non differt a triplo diffe-
 rentiae ejusdem sectoris sphacrici MCN
 a solido constato a duobus conis MCN ,
 MAN ; sed hoc solidum differt a co-
 no MCN per conum MAN , & se-
 ctor sphacricus MCN differt a cono
 MCN per segmentum sphacricum
 MAN ; hinc cum segmentum sphacri-
 cum MAN sit ad conum MAN , ut
 tria ad duo (2), erit differentia sectoris
 sphacrici MCN a cono MCN ad
 differentiam ejusdem sectoris sphacrici
 MCN a solido constato a duobus co-
 nis MCN , MAN , ut tria ad unum,
 spectis infinitesimis. Ergo differen-
 tia

(1) per
 coroll.
 prop. 14.

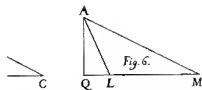
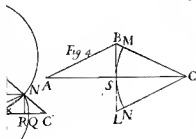
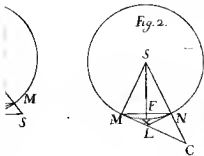
(2) per
 coroll.
 prop. 12.

ni OCP a sectore sphaerico $M CN$,
& differentia ejusdem sectoris sphaerici
 $M CN$ a cono $M CN$ habent ad ean-
dem quantitatem eandem rationem, spre-
tis infinitesimis; adeoque earum ratio
non differt a ratione aequalitatis. *Q. E. D.*

COROLLARIUM:

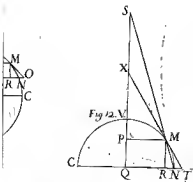
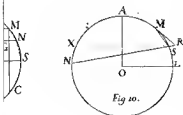
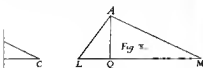
Si conus MAN sit *duo*, erit segmen-
tum sphaericum MAN *tria* (1), & per
hanc propositionem conus truncatus O (1) per
coroll.
prop. 12.
 MNP , seu differentia conorum MCN ,
 OCP erit *sex*; hoc est, conus MAN ,
segmentum sphaericum MAN , & co-
nus truncatus $OMNP$ erunt in pro-
portionem harmonica.

ELEMEN-

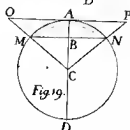
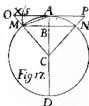
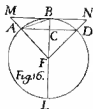
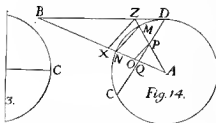


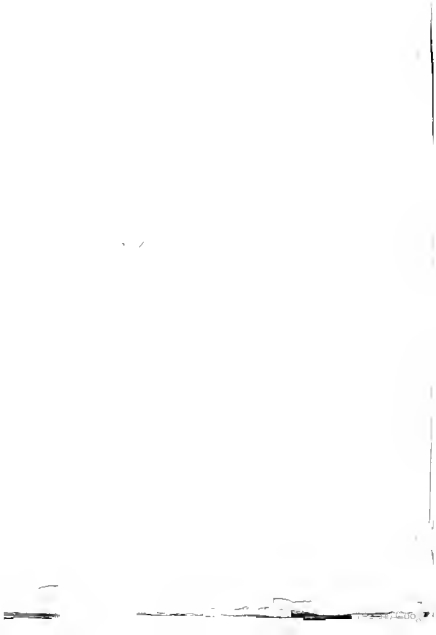


Tab II. Lib II.









ELEMENTA
GEOMETRIAE
INFINITESIMORUM
LIBER TERTIUS.

PROPOSITIO I.



IN curva quacunque $A B C D E$, sumptis arcibus $A B$, $B C$, $C D$, $D E$ infinitesimis cujuscunque ordinis, ductisque subtensis $A B$, $B C$, $C D$, $D E$; dico angulos $A B C$, $B C D$, $C D E$ factos a singulis binis subtensis infinitesimam habere differentiam a summa duorum rectorum, exceptis nonnullis punctis numero finitis.

Fig. 1.

Demonst. Ducatur chorda $A E$, quae subrendat arcum $A B C D E$ finitum, distinctum in arcus $A B$, $B C$, $C D$, $D E$ infinitesimos, qui certe erunt numero infiniti; ac proinde cum subtensa $A E$ terminabunt polygonum infinitorum laterum, cujus anguli externi omnes erunt numero infiniti; sed anguli externi cujuscunque polygoni simul sumpti acquant quatuor rectos. Ergo summa horum infinitorum angulorum non potest esse major quatuor rectis, quod sal-

M 2

sum

sum. esset, si anguli $A B C$, $B C D$ &c. in punctis numero infinitis respective differrent a duobus rectis quantitate finita; nam infiniti anguli finiti dant summam angulorum infinitam. Ergo patet propositio.

COROLLARIUM.

Ex hac propositione patet semper stare conceptum curvae, dummodo anguli $A B C$, $B C D$ &c. differant a duobus rectis quantitate infinitesima, etiam cujuscunque ordinis; neque requiritur, ut istae differentiae sint aequales, vel saltem differant quantitate infinitesima respective; sed possunt esse inaequales, quinimmo & infinitesimae diversorum ordinum; etenim in hisce casibus nunquam destruitur conceptus polygoni infinitorum laterum, ac proinde conceptus curvae.

PRO-

93
PROPOSITIO II.

SI per puncta B, & C arcus B C infinitesimi cujuscunque ordinis ducantur tangentes M B N, O C R; dico angulos S B C, S C B factos a tangentibus cum chorda B C esse infinitesimos. Fig. 2.

Demonst. Sumantur arcus A B, C D infinitesimi, ducanturque subtensae A B, C D productae versus. F; & chorda B C hinc inde producat utrunque in E, & P. Per suppositionem subtensae A B, B C erunt infra tangentem M B N; ergo partes B F, B E erunt supra ipsam tangentem; adeoque tangens M B N cadit intra angulos E B A, F B C; sed isti anguli sunt infinitesimi (1); ergo multo magis anguli M B A, C B N sunt infinitesimi: idem demonstratur de angulo B C S. Ergo patet, &c. Q. E. D.

(1) per
1. prop.

COROLLARIUM.

Cum hæc propositio dependeat ex antecedenti, hinc non verificatur in puncto

94
punctis , in quibus non verificatur
illa .

SCHOLION .

Quando demonstrantur proprietates
curvarum per angulos infinitiesimos tan-
gentium, & chordarum infinitiesimarum,
semper excluduntur puncta, in quibus
praedictae propositiones non verificantur;
sicuti etiam excluduntur puncta regres-
sus, & flexus contrarii, nisi oppositum
moneatur; quibus punctis quid eveniat
curvae suo loco determinabimus.

PROPOSITIO III.

Fig. 3. **I**N curva quacunque arcus B C infi-
nitiesimus non differt a corda B C,
nisi infinitesima quantitate ordinis supe-
rioris.

Demonst. Per puncta B, & C ducan-
tur ragentes B L, C L concurrentes
in L, ex puncto L ducatur normalis
L Q ad chordam B C. Quoniam angu-
li

li $L B Q$, $L C Q$ sunt infinitesimi (1),
 erit normalis $L Q$ infinitesima respectu ad.
 latera $B L$, $B Q$, & $C L$, $C Q$ (2);
 sed differentia laterum $B L$, $B Q$, &
 $C L$, $C Q$ est infinitesima respectu ad
 $L Q$; ergo $B L \div L C$, ac proinde
 arcus $B C$ non differt a chorda $B C$
 nisi infinitesima quantitate ordinis supe-
 rioris. *Q. E. D.*

(1) per
 2. prop.

(2) per
 9. prop.
 lib. 1.

PROPOSITIO IV.

Recta AF subtendat arcum $ABCD$ Fig. 4
 $E F$ cujuscunque curvae; ex pun-
 ctis A , & F ducantur rangentes $A M$,
 $F N$; dico summam angulorum MAF ,
 AFN aequalem esse omnibus angulis
 factis ab omnibus tangentibus cum la-
 terculis evanescentibus arcus $A B C D$
 $E F$.

Demonst. Arcus $A C F$ dividatur in
 arcus infinitesimos $A B$, $B C$, $C D$,
 $D E$, $E F$; arcibus ducantur subtensae
 $A B$, $B C$, &c.; istae cum chorda AF
 terminabunt polygonum infinitorum la-
 te-

terum, cujus anguli externi SAB , OBC , AFR &c. sunt aequales quatuor rectis; sed anguli SAB , RFA cum angulis BAF , AFE sunt aequales quatuor rectis; ergo, ablaris communiter angulis SAB , RFA , erunt omnes anguli infinitiesimi OBC &c. aequales angulis BAF , AFE ; sed anguli BAF , AFE , evanescuntibus arcibus AB , BC &c., tandem coincidunt cum angulis tangentium MAF , AFN ; & anguli infinitiesimi CBO &c. tandem coincidunt cum angulis factis a tangentibus cum laterculis evanescentibus curvae; ergo etiam anguli MAF , AFN sunt aequales omnibus angulis factis ab omnibus tangentibus cum laterculis evanescantibus arcus ACF .
Q. E. D.

COROLLARIUM.

Hinc si anguli OBC &c. sunt infinitiesimi primi ordinis, & latera AB , BC sint quoque infinitiesima primi respectu AF , erit summa angulorum MAF , AFN

$A F N$ finita, cum resultet ex infinitis
 angulis $O B C$ infinitesimis primi ordi-
 nis; si vero anguli $O B C$ sunt infini-
 tesimi secundi ordinis, erit summa angu-
 lorum $M A F$, $A F N$ infinitesima
 primi. Idem dicito si anguli $O B C$
 sint infinitesimi ordinis superioris.

SCHOLION.

Si anguli $O B C$ &c. non essent ju-
 giter ejusdem ordinis, sed continue ordi-
 num superiorum, tunc summa angu-
 lorum $M A F$, $A F N$ esset ejusdem
 ordinis, ac est angulus $O B C$ ordinis
 inferioris.

PROPOSITIO V.

IN curva $B O X C$, sumptis arcibus Fig. 5.
 $O D$, $D E$, $E F$, $F B$ &c. infinite-
 simis alicujus ordinis, sed respective
 ejusdem, anguli externi ODA , DEM
 &c., facti a chordis $D E$, $E F$ &c. pro-
 ductis, sint infinitesimi ejusdem ordinis
N respe-

respective: si sumantur arcus BO , OX , XC alterius ordinis inferioris, sed respective ejusdem; dico angulos externos SOX , TXC &c., factos a chordis BO , OX &c. productis, esse ejusdem ordinis respective.

Demonst. Ducantur rectae OD , OE , OF , &c., & per punctum O ducatur tangens ZOY . Quoniam arcus OD , DE sunt infinitesimi ejusdem ordinis. per suppositionem, erunt rectae OD , DE infinitesimae ejusdem ordinis (1); ac proinde in triangulo obrusangulo ODE anguli DOE , DEO sunt infinitesimi ejusdem ordinis, ac est angulus ADO ; ac proinde ejusdem ordinis, ac est angulus MED , vel ejusdem ordinis, ac est angulus MEO . Similiter quoniam arcus OD , DE sunt infinitesimi ejusdem ordinis, ac est arcus EF , erit arcus OE infinitesimus ejusdem ordinis, ac est arcus EF ; hinc subtrahae OE , EF sunt infinitesimae ejusdem ordinis (2). Ergo in triangulo obrusangulo OEF angulus FOE est infinitesimus ejusdem ordinis, ac est angulus

(1) per
3. prop.

(2) per
3. prop.

lus $M E O$, seu infinitesimus ejusdem ordinis, ac est angulus $D O E$. Idipsum demonstratur de aliis angulis $B O F$ in infinitum, usquedum arcus $O B$, seu chorda $O B$ sit alterius ordinis inferioris. Ergo angulus $D O B$, ac proinde angulus $B O Y$, seu $S O Z$ componitur ex infinitis angulis ejusdem ordinis, ac est angulus $D O B$; eodem modo demonstratur angulum $Z O X$ componi ex infinitis angulis ejusdem ordinis, ac est angulus $D O E$. Ergo integer angulus $S O X$ componitur ex infinitis angulis ejusdem ordinis anguli $D O E$. Idem demonstratur de angulo $T X C$ &c. Ergo anguli $S O X$, $T X C$ &c. sunt ejusdem ordinis respective, cum sint eadem ratione infiniti respectu ad angulum $D O E$. *Q. E. D.*

COROLLARIUM I.

PROPOSITIO I.

Ex demonstratione propositionis colligitur angulos $D O Y$, $B O Y$ factos a tangente $O Y$ cum chordis $O D$, $O B$ diversorum ordinum, esse & ipsos ordi-

N 2

num

num diversorum, & quidem angulum chordae ordinis superioris esse & ipsum ordinis superioris respectu ad angulum chordae ordinis inferioris.

COROLLARIUM II.

Colligitur etiam angulos BOY , YOR , seu ZOX , factos a chordis BO , XO ejusdem ordinis cum tangente ZOY , esse ejusdem ordinis.

COROLLARIUM III.

Ex puncto B ducta tangente BN erunt anguli YOB , OBN ejusdem ordinis; nam sicuti demonstratum est angulum YOB componi ex infinitis angulis ejusdem ordinis, ac est angulus DOE , ita demonstrari potest etiam angulum OBN componi ex infinitis angulis ejusdem ordinis, ac est angulus DOE .

COROLLARIUM IV.

Si anguli ADO , MED &c. sint infinitesimi ejusdem ordinis, ac sunt arcus OD , DE , EF &c. quando anguli YOB , OBN sunt finiti, erit chorda OB pariter finita; si vero anguli ADO , MED &c. sint infinitesimi ordinis inferioris respectu ad ordinem arcuum OD , DE &c. quando anguli YOB , OBN sunt finiti, chorda OB est infinitesima; ac proinde curva deberet in se redire antequam chorda OB esset finita. Si tandem anguli ADO , MED &c. sint infinitesimi ordinis superioris respectu ad ordinem arcuum OD , DE &c. quando anguli ADO , MED &c. sunt finiti, chorda OB esset infinita; hinc curva non posset in se redire priusquam chorda OB esset infinita.

PRO-

PROPOSITIO VI.

Fig. 6. **I**N curva praecedentis propositionis, maxima altitudo $M R$ arcus $A R F$ respectu ad chordam $A F$ est ejusdem ordinis, ac sunt anguli $X A F$, $A F Z$, facti a tangentibus $X A$, $Z F$ cum chorda $A F$.

Demonst. Maxima altitudo $R M$ arcus $A R M$ est ubi tangens $X R Z$ est parallela chordae $A F$, alioquin arcus $A R M$ non esset rorus infra tangentem; hinc anguli $M A R$, $M F R$ (ductis $A R$, $R F$) sunt aequales angulis $X R A$, $F R Z$; adeoque sunt ejusdem ordinis, ac sunt anguli $X A R$, $R F Z$ (1), seu ejusdem ordinis ac sunt anguli ~~$X A F$~~ , $A F Z$; sed $R M$ respectu $A M$, & $M F$ est infinitesima ejusdem ordinis, ac sunt anguli $R A M$, $R F M$ (2), seu ejusdem ordinis, ac sunt anguli $X A F$, $A F Z$; hinc, cum anguli $X A F$, $A F Z$ sint ejusdem ordinis, erit $M R$ respectu ad rotam $A F$ ejusdem ordinis, ac sunt anguli $X A F$, $A F Z$. *Q. E. D.*

(1) per
coroll.
3. prop.
5.

(2) per
9. prop.
lib. 1.

PRO-

103
PROPOSITIO VII.

Rectae AB, BC ad quemcunque angulum finitum $A B C$ positae sint diametri coordinatarum; ducanturque ordinatae QN, PM intercipientes arcum $M N$ infinitesimum primi ordinis, cujus chorda sit $M N$, & ducatur $N R$ parallela ad AB ; dico latera trianguli $M R N$ esse infinitesima primi ordinis, excepto, quando chorda $M N$ producta faciens angulum infinitesimum accedit ad parallelismum cum diametris coordinatarum.

Fig. 7;
& 8.

Demonst. Chorda $M N$ producatuſque dum concurrat cum diametris coordinatarum in punctis $X, & Z$; cum haec non faciat angulos infinitesimos cum diametris $X B, B Z$, erunt anguli $B X Z, X Z B$ finiti; adeoque in triangulo $X B Z$, & ob parallelismum rectarum $N R, X B$, & $R M, B Z$ in triangulo etiam $R M N$, anguli omnes sunt finiti; ac proinde latera $N M, M R, N R$ sunt ejusdem ordinis; sed $N M$ ex hypothesi est infinitesima primi ordinis, quia arcus $N M$ est infinitesimus pri-

primi ordinis. Ergo $N R$, $R M$ sunt infinitesimae primi ordinis. *Q. E. D.*

COROLLARIUM I.

Si arcus $N M$ interceptus ab ordinatis $Q N$, $P M$ sit infinitesimus ordinis superioris, erit etiam $N R$, & $M R$ infinitesima ejusdem ordinis superioris.

COROLLARIUM II.

Si per punctum N ducatur tangens NS , efformatum erit triangulum MNS , in quo anguli NSM , NMS sunt finiti per suppositionem; angulus vero SNM est infinitesimus per naturam curvae; ~~ergo SM est infinitesima respectu NM , ac proinde respectu RM ;~~ hinc MS respectu RM erit spernenda.

SCHOLION.

In punctis, in quibus $M N$ est parallela diametris coordinatarum, observanda
ve-

veniant, quae diximus in scholio propositionis IX. libri secundi,

PROPOSITIO VIII.

IN diametro AB curvae $AMNC$ sumantur PQ , QB quantitates infinitesimae primi ordinis, quae non differant, nisi quantitate infinitesima respective; ex punctis P, Q, B ducantur ordinatae PM, QN, BC ad angulum finitum cum diametro AB , tum chordae MN, NC , tandem ex punctis M , & N ducantur MR, NX parallelae ad AB ; oportet determinare differentiam, quae intercedit inter latera homologa triangulorum $M RN, NX C$.

Fig. 9,
& 10,

Con. Chorda MN producaturs usque dum concurrat cum ordinata BC producta, si opus est, in S . Quoniam triangula $M RN, NS X$ sunt aequiangula, ac proinde similia ob parallelismum rectarum RN, XS , & MR, NX ; hinc, si duo latera homologa MR, NX , vel RN, XS , vel NM, NS

O

sup-

supponantur constantia, seu aequalia, omnia latera trianguli $N M R$ sunt aequalia lateribus correspondentibus trianguli $S N X$; si vero duo latera homologa differant quantitate infinitesima alicujus ordinis, etiam reliqua latera homologa triangulorum $M N R$, $N S X$ differunt quantitate infinitesima ejusdem ordinis; sed latera trianguli $N C X$ non differunt a lateribus trianguli $N S X$, nisi quantitate infinitesima secundi ordinis, posito angulo $C N S$ infinitesimo primi ordinis (1). Ergo latera trianguli $M N R$ non differunt a lateribus trianguli $N C X$, nisi quantitate infinitesima secundi ordinis. *Q. E. I.*

(1) per
prop. 9.
10. 11.
lib. 1.

COROLLARIUM I.

Posito angulo $C N S$ infinitesimo ordinis superioris, etiam differentia inter latera trianguli $N C X$, & $N S X$ erit & ipsa infinitesima ordinis superioris; hinc, si latera trianguli $M R N$, & $N X S$ sunt relative aequalia, erit differentia inter latera triangulorum $M R N$, $N C X$ eadem,

eadem, ac illa, quae intercedit inter latera triangulorum NSX , NCX ; si vero latera triangulorum $M RN$, NXS differunt quantitate infinitesima alicujus ordinis, tunc differentia, quae intercedit inter latera triangulorum $M RN$, NXC dependet ex combinatione harum quantitatum infinitesimarum cum quantitacibus infinitesimis, quibus differunt latera triangulorum NSX , NCX .

COROLLARIUM II.

Patet etiam via, qua determinari possunt differentiae inter latera homologa triangulorum $M NR$, NCX , etiam si latera horum triangulorum sint infinitesima cujuscunque ordinis, & differentia, quae intercedit inter latera homologa triangulorum $M RN$, NXS sit similiter infinitesima cujuscunque ordinis respective ad ipsa latera, & angulus CNS sit patet infinitesimus cujuscunque ordinis.

O .

SCHO-

In qualibet curva licitum est accipere fluxionem, aut abscissatum, aut ordinarum aut curvae, aut aliam tanquam constantem pro determinandis quantitativibus infinitesimalibus ordinum superiorum relative ad constantes; sed statim ac una tanquam constans sumpta est, liberum amplius non est aliam accipere, alioquin determinaretur curva,

PROPOSITIO IX.

Fig. 11.
& 12.

EX puncto A ad quamcunque curvam P Q B ducantur rectae A Q, A B interceptantes atcum Q B infinitesimum primi ordinis, cui subtrahatur Q B, & ex puncto Q in A B demittatur normalis Q R; dico tria latera trianguli Q R B esse infinitesima primi ordinis, exceptis illis punctis, in quibus Q B vel est normalis ad A B, vel in directum cum A Q, vel saltem a vera normali, & a vera directione cum A Q differt quantitate infinitesima.

De-

Demonst. patet; nam per suppositionem angulus $R B Q$ neque est rectus, neque infinitesimus; igitur cum angulus $B R Q$ sit rectus, in triangulo $R B Q$ tres anguli sunt finiti, ac proinde tria latera infinitesima primi ordinis, cum $B Q$ sit infinitesimum primi ordinis per suppositionem. *Q. E. D.*

COROLLARIUM I.

Si arcus $Q B$ sit infinitesimus ordinis superioris, erunt etiam latera $Q R$, $R B$ infinitesima ejusdem ordinis superioris.

COROLLARIUM II.

Si ex puncto Q ducatur tangens $Q S$, quae concurrat cum $R B$ producta, si opus est, in S , cum anguli $Q B S$, $Q S B$ sint finiti per suppositionem, & angulus $B Q S$ sit infinitesimus per naturam curvae, erit $B S$ intercepta inter tangentem, & curvam infinitesima respectu $B Q$, ac proinde respectu $R B$; adeoque $B S$ respectu $R B$ erit spernenda.

SCHO.

Quod dictum est aliquam alterationem patitur, ubi chorda BQ vel est normalis ad AB , vel in directum cum AQ ; & generaliter loquendo, quando anguli fluentes vel evadunt recti, vel aequales duobus rectis, vel saltem differentia horum angulorum aut a recto, aut a duobus rectis transit ex uno ordine ad alium, tunc nonnulli anguli fluentes, ac proinde nonnullae rectae fluentes, transcunt ex uno ordine ad alium; & sic tota congeries quantitatum fluentium alterationem patitur, quae tamen non erit difficile determinari ab illis, qui nostris elementis instructi sunt.

PROPOSITIO X.

Fig. 13,
& 14

EX puncto A ad quamcunque curvam ducantur tres rectae AP , AQ , AB , interceptantes arcus BQ , QP infinitesimos primi ordinis, qui non differant, nisi quantitate infinitesima respectu-

tive, rum ex punctis P, Q ducantur normales PM, QR ad rectas AQ, AB ; oportet determinare differentiam, quae intercedit inter latera homologa triangulorum PMQ, QRB .

Con. Rectae AP, AQ, AB sint finitae, & chordae BQ, QP non jaceant in directum cum rectis AB, AP ; chorda PQ producaturs usquedum concurrat cum AB producta, si opus est, in S . Cum arcus PQ, QB sint infinitesimi primi ordinis, erunt etiam chordae PQ, QB infinitesimae primi ordinis (1); ac proinde in triangulis PAQ, QAB , cum anguli APQ, AQP , & AQB, ABQ sint finiti, & latera PQ, QB sint infinitesima primi ordinis, erunt anguli PAQ, QAB infinitesimi primi ordinis (2); hinc in triangulo MQP angulus MQP auctus est quantitate infinitesima primi ordinis respectu ad angulum RSQ trianguli RQS ; ergo, posito latere uno homologo constante, erit differentia reliquorum laterum infinitesima primi ordinis respective (3), hoc est, secundi ordinis;

(1) per
3. prop.

(2) per
prop. 9.
10. 11.
lib. 1.

(3) per
prop. 17.
lib. 1.

(1) per
prop. II.
lib. I.

dinis; sed latera trianguli RQB non differunt a lateribus trianguli RQS , nisi quantitate infinitesima secundi ordinis (1). Ergo latera trianguli MPQ non differunt a lateribus homologis trianguli RQB , nisi quantitate infinitesima secundi ordinis.

(2) per
doctrinam
parallelorum.

(3) per
praecedentem
part.

(4) per
I. part.
hujus.

Si vero nullum latus sit constans, sed unum RQ , ex. gr., trianguli RQS , differat a latere homologo MP trianguli MPQ quantitate infinitesima ordinis superioris; tum abscindatur QX , ex. gr., aequalis PM , & per A , & X ducatur AX , quae concurrat cum QS in Z . Quoniam XZ est infinitesima respectu AX , & angulus XAB infinitesimus, erit XZ parallela ad RS . (2). Igitur ~~cum~~ RX sit infinitesima ordinis superioris, hinc differentia inter latera homologa triangulorum XQZ , RQS erit infinitesima ordinis superioris. (3); sed latera trianguli XQZ non differunt a lateribus trianguli MPQ , nisi quantitate infinitesima secundi ordinis (4). Ergo latera trianguli RQS , ac proinde latera trianguli RQB , non differunt

113

runt a lateribus trianguli $M P Q$, nisi
quantitate infinitesima secundi ordinis ,
Q. E. I.

COROLLARIUM.

Patet via, qua determinari potest differentia inter latera homologa triangulorum $M Q P$, $R Q B$, etiamsi latera horum triangulorum sint infinitesima cujuscunque ordinis, & differentiae horum laterum sint similiter infinitesimae cujuscunque ordinis respective, & angulus $S Q B$ sit infinitesimus cujuscunque ordinis.

SCHOLIUM I.

Si rectae $A P$, $A Q$, $A B$ sint infinitesimae, vel jaceant in directum cum chordis $P Q$, $Q B$, tunc quae haecenus demonstravimus alterationem patiuntur.

P

SCHO-

Fig. 15. Antequam ulterius progrediamur ju-
 var animadvertete quantitates fluentes
 posse fluere ex omni parte, qua limite
 coercentur; unde sedulo perpendendum
 est, nisi in paralogismos incurrere veli-
 mus, ex quibusnam partibus data quan-
 titas fluat: sic abscissæ AP , AQ , &
 ordinatæ PM , QN ex una parte ran-
 tum fluunt; sed subtangens PV ; ex.
 gr., non tantum fluit ex parte V , sed
 etiam ex parte P , itaut tota fluxio sit
 $PQ \pm UR$.

PROPOSITIO XL

Fig. 16. **I**N curva quacunque, quando anguli
 MAB , ABN , facti a chorda AB
 cum tangentibus AM , BN , sunt aequa-
 les duobus rectis, tunc chorda AB est
 maxima ex parallelis.

Demonst. Per punctum quodlibet F
 sumptum in curva ducatur PQ paral-
 lela AB . Cum anguli MAB , ABN
 sint

sint aequales duobus rectis, erit AP parallela ad BQ ; ac proinde PQ aequalis erit AB ; sed puncta F , T intersectionis rectae PQ cum curva sunt intra tangentes AM , BN . Ergo chorda FT non potest esse major recta PQ , ac proinde recta AB . Ergo AB est maxima chorda ex parallelis. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Si sumatur arcus AF infinitesimus cujuscunque ordinis, & per punctum F ducatur FR parallela tangentibus MA , BN , ductaque chorda AF , erit angulus AFR aequalis angulo MAF , ac proinde infinitesimus. Igitur, positis angulis ABN , BAM , seu angulis ARF , RAF finitis, erit AR infinitesima respectu RF .

Fig. 17. **I**N curva quacunque, si anguli RST , STQ , facti a chorda ST cum tangentibus RT , SQ , sint aequales quatuor rectis, erit chorda ST minima ex parallelis post maximam AF .

Demonst. Quoniam anguli RST ; STQ sunt aequales quatuor rectis, tangentes RT , SQ unam rectam efficiunt cum chorda ST ; ac proinde sunt & ipsae in directum, hinc curvæ ulterius non procedit. Intra chordam maximam AF , & chordam ST ducatur alia chorda MN parallela ad ST ; & per puncta M , & N ducantur tangentes ML , NL secantes alias tangentes RT , SQ in punctis R , & Q , & concurrentes in L . Chorda MN est major recta RQ ; sed puncta R , & Q esse debent extra curvam. Ergo recta RQ non potest esse minor recta ST ; ac proinde chorda MN non erit minor chorda ST . Ergo chorda ST minima est ex parallelis post maximam. *Q.E.D.*

CO-

COROLLARIUM.

Si sumatur arcus MS infinitesimus, & per M ducatur chorda MN parallela chordae minimae ST ; tum ex S demittatur normalis SG in chordam MN , erit angulus CMS aequalis angulo ISM , ac proinde infinitesimus. Igitur, cum anguli MSG , MGS sint finiti, erit GS infinitesima respectu MG (1).

(3) per
prop. 9.
lib. 1.

LEMMA.

SI per punctum A arcus ADB describatur alius arcus AS , itaut distantia DC singulorum punctorum arcus ADB a chorda AB differat respective quantitate infinitesima DS a distantia SC singulorum punctorum arcus AS a chorda AB ; curvatura arcus AS accipi potest pro curvatura arcus ADB ; minime vero si differentia DS non sit infinitesima respectu SC . Hoc per se clarum est.

Fig. 18.

SCHO-

Hoc cum respective tantum verum sit, hinc in nonnullis circumstantiis, ex. gr., quando considerantur quantitates ordinis rectae $S D$, vel ordinis superioris, licitum non erit accipere curvaturam arcus $A D$ pro curvatura arcus $A S$.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 19.

Sit $M N$ arcus infinitesimus cujuscunque ordinis curvae $N M T$, in qua ducta chorda $M N$, & tangentibus $N Q$, $M Q$, sine anguli $Q M N$, $M N Q$ infinitesimi ejusdem ordinis, ac est arcus $M N$, differentiae vero istorum angulorum sine infinitesimae cujuscunque ordinis incipiendo ab ordine proximo superiore praedictorum angulorum; si ex punctis M , & N ducantur ad tangentes $M Q$, $N Q$ normales $M C$, $N C$ concurrentes in C , tum centro C intervallo $C N$ describatur arcus $N O$; dico curvaturam arcus $M N$ non differre a curvatura arcus $N O$.

De-

Demonst. Ex puncto N ducatur linus
 rectus NR in CM . In quadrilatero
 $QMCN$, cum anguli QMC, QNC
 sint recti, erunt anguli MQN, MCN
 aequales duobus rectis; ac proinde
 angulus MCN aequalis erit angulis
 QMN, MNQ ; adeoque angulus
 MCN est ejusdem ordinis, ac est ar-
 cūs MN , seu chorda MN (1); sed
 anguli CNM, CMN sunt finiti, (1) per
 3. prop.
 & acuti, cum singuli differant a re-
 cto quantitate infinitesima; hinc rectae
 CM, CN sunt finitae, & earum
 differentia MO est infinitesima (2).
 Praeterea ob angulos rectos $CMQ,$
 CNQ etunt quadrata CM, MQ ae-
 qualia quadratis CN, NQ ; hinc cum
 CM ponatur major CN , erit QN
 major MQ ; ex recta QN abscindatur
 QS aequalis MQ , & ducatur MS ,
 erunt anguli SMN, MNS aequales
 angulo MSQ , seu SMQ ; hinc an-
 gulus NMS est semidifferentia angu-
 lorum QMN, MNQ ; adeoque an-
 gulus SMN erit infinitesimus respectu
 ad angulum MNS per suppositionem,
 & SN

(1) per
3. prop.

(2) per
prop. 10.
lib. 1.

(1) per
prop. 14.
lib. 1.

& $S N$ erit infinitesima respectu $S M$ (1); ac proinde respectu $S Q$. Si igitur a quadratis $C M$, $M Q$ ex una parte, & a quadratis $C N$, $N Q$ ex altera, auferantur communiter quadrata $M Q$, $C N$, remanebit tandem rectangulum $C O M$ aequale rectangulo $Q S N$, spreis differentiis infinitesimis respectivis. Ergo $C O$ est ad $Q S$, ut $S N$ est ad ad $M O$; sed $Q S$ est infinitesima respectu $C M$ & $N S$ est infinitesima respectu $S Q$. Ergo $M O$ est infinitesima ordinis superioris ordine duplo majore rectae $Q S$, seu $M N$, seu sinus recti $N R$; sed $R O$ est infinitesima ordinis duplo majoris sinus recti $N R$ (2). Ergo $M O$ est infinitesima respectu $O R$.

(2) per
prop. 1.
lib. 2.

Idipsum verificatur respectu ad alia puncta arcuum $M N$, $O N$; nam ducto quolibet radio $C D Z$, & ex N sinu recto $N X$, eodem modo demonstratur $D Z$ esse infinitesimam respectu $D X$, & multo magis respectu $D F$. Si igitur ex Z ducatur normalis ad $R N$, erit $Z E$ infinitesima respectu $E L$, ut colligitur ex notis circuli proprietatibus. Ergo
cur-

curvatura arcus $M N$ non differt a curvatura arcus $N O$ (1). *Q. E. D.*

(1) per
lemma.

PROPOSITIO XIV.

IN curva $T M N$ superioris propositionis, *Fig. 19.*
si sumantur duo arcus successivi $M T$,
 $M N$ infinitesimi cujuscunque ordinis,
sed ejusdem; & ex punctis T , M , N
erigantur normales ad curvam $T G$, $N C$
intersecantes normalem ad curvam $M C$;
dico interceptam $C G$ esse infinitesimam.

Demonst. Producarur $T G$ usquedum
concurrat cum $N C$ in V . Differentia
inter $T V$, $V N$ erit ordinis superioris
ordine duplo majore arcus $T M N$,
seu anguli $T V N$; addita communiter
 $C V$, erit differentia inter $T V + V C$,
& $C N$ ordinis superioris ordine duplo
majore arcus $T M N$, seu anguli $T V N$;
sed $C M$ non differt a $C N$, & $G M$
a $G T$, nisi quantitate infinitesima ordi-
nis superioris ordine duplo majore ar-
cum $M N$, $M T$. Ergo differentia in-
ter

Q

(1) per
prop. 13.
lib. I.

ter $TV \perp VC$, & CM , seu inter
 $TV \perp VC$, & $TG \perp CG$, seu
 inter $GV \perp VC$, & CG erit infi-
 nitesima ordinis superioris ordine duplo
 majore arcus TMN , seu anguli TVN ;
 sed in triangulo GVN , ob angulos
 CGV , GCN infinitesimos ejusdem
 ordinis, differentia inter latera $GV \perp$
 VC , & basim CG est infinitesima res-
 pectu ad CG ordinis duplo majoris an-
 guli GVN (1). Ergo eadem differen-
 tia respectu ad CM , seu ad quanti-
 tatem finitam est infinitesima ordinis su-
 perioris ordine duplo majori anguli T
 VN ; respective vero ad CG est in-
 finitesima ordinis duplo majoris ordine
 ejusdem anguli TVN . Ergo CG est
 infinitesima *Q. E. D.*

COROLLARIUM I.

Idipsum cum demonstretur de omni-
 bus aliis successivis interceptis CG eo-
 dem modo determinari, hinc patet om-
 nia puncta, in quibus sese interfecant
 normales ad curvam infinite proximae,
 esse

esse in alia curva, ex. gr., CGI , quae respectu ad curvam TMN illius *evoluta* dicitur; curva vero TMN *genita ex evoluta* CGI appellatur; nam si pedetentim solvatur filum circumplicatum circa evolutam IGC , punctum extremum I , ex. gr., describet curvam TMN ; normales MG , NC &c. determinatae per intersectionem normalium infinite proximarum nuncupantur *radii osculatorii*; circulus vero singulis hisce radiis descriptus appellatur circulus osculi.

COROLLARIUM II.

Duae praecedentes propositiones verificantur etiam si arcus MN sit infinitesimus ordinis superioris, vel inferioris relate ad angulos QMN , MNQ , dummodo differentia horum angulorum sit respective infinitesima; nam angulus SMN est semper infinitesimus relate ad angulum QMN , seu MNQ ; adeoque SN est semper infinitesima respectu SQ , seu respectu MN , seu respectu NR . Igitur cum radius CO non possit

Q_2

possit esse ordinis superioris sinus recti $R N$, sed ad summum ejusdem ordinis, quando scilicet anguli $Q M N$, $M N Q$ sunt finiti; hinc $M O$ est semper infinitesima respectu $R O$; nam $M O$ est quarta proportionalis post $C O$, $Q S$, $S N$; & $R O$ est tertia proportionalis post $C O \div C R$, & $R N$. Similiter differentia inter $G V \div V C$, & $C G$ respectu ad $C M$ est semper infinitesima ordinis superioris ordine duplo majore arcus $T M N$, seu anguli $T V N$; sed differentia inter $G V \div V C$, & $G C$ respectu $C G$ est infinitesima ordinis duplo majoris anguli $T V N$. Ergo $C G$ est semper infinitesima respectu $C M$.

—SCHOLIUM.

In triangulo $M C N$, posita basi $M N$ infinitesima ejusdem ordinis relate ad assignabilem, ac est angulus $M C N$, latera $M C$, $C N$ sunt finita; nam ut ordo anguli $M C N$ ad angulum finitum $C N M$, ita ordo rectae $M N$ ad ordinem rectae $C M$; sed $M N$ est ejusdem

dem ordinis relate ad finitum, ac est angulus $M C N$ relate ad angulum finitum; ergo $C M$ est finita. Si vero $M N$ relate ad assignabilem est infinitesima ordinis superioris respectu ad ordinem anguli $M C N$, tunc $C M$ est infinitesima. Si tandem $M N$ est infinitesima ordinis inferioris, tunc $M N$ est finita. Ergo curvatura arcus $N O$, seu $N M$ in primo casu aequalis est curvaturae circuli finiti, in secundo casu est major, in ultimo vero est minor omni circulo finito.

PROPOSITIO XV.

SIT $M N$ arcus infinitesimus cujuscunque ordinis curvae $N M T$, in qua, ducta chorda $M N$, & tangentibus $M Q$, $Q N$, sint anguli $Q M N$, $M N Q$ simul sumpti ejusdem ordinis, ac est arcus, sed utrunque inaequales; si ex punctis M , & N ad ragentes $M Q$, $Q N$ erigantur normales concurrentes in C , & centro C intervallo $C N$ describatur arcus

Fig. 19.

arcus NO ; dico curvaturam arcus MN differre a curvatura arcus NO .

(1) per
prop. 13.
E. 14.
lib. 1.

Demonst. Ducantur rectae MS &c. ut in propositione decima tertia. Angulus SMN semidifferentia angulorum QMN , MNQ vel est ejusdem ordinis, ac est angulus MNQ , vel relate ad hunc est infinitus; ergo SN est semper ejusdem ordinis rectae MN (1), seu sinus recti NR . Cum igitur in hoc casu sit bisrectangulum CO in OM aequale bisrectangulo QS in SN \dagger quadrato SN ; ergo MO est quarta proportionalis post bis sinum totum CO , post bis QS \dagger SN , & post SN . Sed bis QS \dagger SN , & SN sunt ejusdem ordinis; hinc MO relate ad CO est ordinis duplo ~~majoris~~ rectae QN , seu sinus recti NR ; sed etiam RO relate ad CO est infinitesima ordinis dupli majoris sinus recti NR ; ergo MO , & OR sunt ejusdem ordinis. Idipsum cum demonstretur de aliis rectis infinitis ZE , & EL ; ergo curvatura arcus MN differt a curvatura arcus NO (2).

(2) per
lemma.

$Q. E. P.$

PRO-

127

PROPOSITIO XVI

IN curva antecedentis propositionis, si Fig. 19.
sumantur duo arcus TM , MN infinite-
simi cujuscunque ordinis, & ex
punctis T , M , N ducantur normales ad
curvam TV , MC , NC sese interse-
cantes in punctis G , V , C ; dico inter-
ceptam CG , & rectam GM esse ejus-
dem ordinis.

Demonst. Differentia inter TV , VN
respectu CM est infinitesima ordinis du-
plo majoris anguli TVN (1); ergo ar-
gumentando, ut in propositione decima
quarta, erit differentia inter $GV \mp VC$,
& GC respectu CM ordinis duplo
majoris anguli TVN ; sed differentia
inter $GV \mp VC$, & GC respectu
ipsius CG est infinitesima ordinis du-
plo majoris anguli TVN ; ergo eadem
differentia est infinitesima ejusdem ordi-
nis tum respectu CM , tum respectu
 GC ; adeoque MC , GC sunt ejus-
dem ordinis. *Q. E. D.*

(1) per
praece-
dentem.

CO-

Hinc patet curvas hujusmodi non habere radium osculatorium, neque circulum osculi, neque evolutam.

SCHOLION.

Methodi haecenus traditae pro determinandis evolutis curvarum, locum dumtaxat habere possunt in curvis propositionis decimae tertiae, in quibus anguli, facti a chorda infinitesima, & tangentibus ductis per extremitates istius chordae, non differunt, nisi infinitesima quantitate respective. Sed advertendum est plures curvas, sumptis arcibus infinitesimis ~~ordinis~~ superioris, habere praerequisitam conditionem, licet tali conditione non gaudeant, sumptis arcibus infinitesimis ordinis inferioris, ut colligitur ex corollario primae propositionis; adeoque pro determinandis evolutis harum curvarum confugiendum est ad arcus infinitesimos ordinis superioris.

PRO-

PROPOSITIO XVII.

Sit SC radius infinitus cujuscunque ordinis circuli ACB , in quo sumatur arcus AB infiniresimus cujuscunque ordinis, incipiendo a primo relate ad finitum; dico nullam dari parabolam primam CX ex infiniris ordinibus, habentem parametrum CZ finitam, cujus vertex habeat eandem curvaturam arcus ACB . Fig. 20.

Demonst. Ex arcu CA ducatur quaelibet ordinata AM in communem axem CR , quae secet parabolam in X . Si curvatura arcus CX non differt a curvatura arcus AC , est AX infiniresima respectu XM ; adeoque rectangulum RM in MC multiplicarum in potentiam determinatam ordinatae AM non differt a rectangulo RM in MC multiplicato in potentiam eandem rectae XM (1); sed potentia praedicta rectae XM multiplicata in rectangulum RM in MC , seu in quadratum MA , seu in quadratum MX aequatur determinatae potentiae

R

(1) *pro*
prop. 20.
lib. 2.

riæ parametri Z C multiplicatae in C M .
 Ergo rectangulum R M in M C multiplicatum in potentiam A M aequatur determinatae potentiae parametri C Z multiplicatae in C M . Ergo R M multiplicata in potentiam rectae A M aequatur determinatae potentiae parametri C Z . Idipsum demonstratur de quavis alia recta R m multiplicata in eandem potentiam rectae a m ; ergo R M multiplicata in potentiam rectae A M non differt, nisi infinitesima quantitate, a recta R m multiplicata in eandem potentiam rectae a m ; sed R M , R m non differunt, nisi infinitesima quantitate M m . Ergo potentiae eadem rectarum A M , a m non possunt differre, nisi infinitesima quantitate *respective*. Quod, cum falsum sit, falsum etiam erit curvaturam arcus C X non differre a curvatura arcus C A . *Q. E. D.*

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

SI in puncto quolibet A occurrant duae
 curvae A B M, A C N, in quibus,
 sumptis circa idem punctum A arcibus
 infinitesimis A B, A C, duarumque chorde
 A B, A C, angulus B A C non sit
 infinitesimus, vel non differat a duobus
 rectis quantitate infinitesima; dico huic
 puncto duas competere tangentes; si ve-
 ro angulus B A C sit infinitesimus, vel
 differat a duobus rectis quantitate infi-
 nitesima; dico huic puncto unam dum-
 taxat competere tangentem.

Fig. 21.
 22. 23.
 24.

Demonst. prima pars. In puncto A
 ducantur tangentes S A T, s A t ad
 arcus A B M, A C N. Quoniam ar-
 cus B A, A C sunt infinitesimi, & pun-
 ctum A est ab utroque exclusum, hinc
 anguli B A S, C A s sunt infinitesimi
 (1), qui si addantur angulo B A C in
 figura 21., vel deducantur ab angulo
 B A C in figura 22., vel eidem angulo
 B A C addatur unus B A S, dedu-
 catur alius C A s, in figura 23., &
 R 2 24.,

(1) per
 prop. 2.

24., resultabit angulus $S A s$ intersectionis tangentium $S A T$, $s A t$, qui neque erit infinitesimus, neque differet a duobus rectis quantitate infinitesima. Ergo tangentes $S A T$, $s A t$ se interfecant ad angulos finitos; adeoque veluti unica tangens considerari non possunt. *Q. E. P.*

Demonst. secunda pars. Si angulus $B A C$ vel est infinitesimus, ut in figura 22., & 23., vel differt a duobus rectis quantitate infinitesima, ut in figura 21., & 24., tunc etiam angulus $S A s$ in figura 22., & 23. erit infinitesimus; in figura veto 21., & 24. differt a duobus rectis quantitate infinitesima; & per consequens in hisce figuris ~~angulus~~ $S A t$ est infinitesimus. Ergo tangentes $S A T$, $s A t$, ut unica tangens spectati possunt. *Q. E. S.*

COROLLARIUM.

Quod dictum est de duabus curvis circa punctum A existentibus, idem dici potest de infinitis.

SCHO-

SCHOLIUM I.

Secunda pars propositionis falsa esse potest, si curvatura circa punctum A sit minor omni circulo finito; etenim fieri potest in hoc casu, ut angulus $S A t$ in figura 21., & 24., vel $S A s$ in figura 22. & 23. sit infinitesimus ordinis inferioris relate ad ordinem anguli $B A S$, facti a tangente $A S$ cum chorda infinitesima $B A$; & tunc tangentes $S A T$, $s A t$, ut unica tangens considerari non possunt; quod certe animadversione dignum est.

SCHOLIUM II.

Quando circa punctum A sunt plures tangentes, tunc punctum illud appellatur *punctum intersectionis*; quando unica est tantum tangens, tunc punctum illud in figura 21. non habet nomen peculiare; in figura 22., & 23. dicitur punctum *regressus*; in figura 24. dicitur punctum *flexus contrarii*. Igitur in puncto flexus contrarii, quae est tangens ad u-

R 3

num

num arcum $A B M$, est etiam tangens
ad alium $A C M$.

SCHOLION III.

Fig. 25,
26, 27,
28.

Si in aliquo puncto D alicujus cur-
vae, pars $X M$ ordinatae $S M$, in-
tercepta inter curvam, & tangentem,
evadat nihilo aequalis, aut infinira, hoc
est, si intercepta $X M$ evadat ordinis
superioris, vel inferioris relate ad ordi-
nem ejusdem interceptae in aliis punctis
curvae, tunc communiter existimatum
est punctum illud aut esse punctum fle-
xus contrarii, aut regressus; verum hoc
generaliter loquendo falsum esse pater
ex eo, quod in punctis etiam, in qui-
bus tangens $D M$ simpliciter parallela
est, vel normalis diametro $B A$, inter-
cepta $X M$ evadit nulla, vel infinira,
sensu jam explicato, absque eo quod
punctum D sit punctum flexus contrarii,
aut regressus. Igitur ex eo, quod pars
ordinatae intercepta inter curvam, &
tangentem sit nihilo aequalis, aut infi-
nita, nil aliud inferri potest, quam pun-
ctum

Etum D esse punctum peculiare curvae, in quo vel adest maximum aliquod, vel minimum, vel punctum flexus contrarii, vel regressus. Ur aurem determinemus utrum in puncto D sit maximum aliquod, aut minimum, vel flexus contrarius, vel regressus, puto nullam aliam ruriorem viam nos ingredi posse, quam recurrendo ad puncta S, R infinire proxima puncto B, & hinc inde ab eodem puncto B accepta in linea abscissarum, & observando utrum hisce punctis convenient ordinatae, si sint positivae, an negativae; utrum etiam interceptae inter curvam, & tangenrem sint positivae, an negativae, licet sint cujuscunque ordinis infinitesimorum; nam ex horum combinatione facile eruitur quam mutationem subeat curva in puncto D. Sit itaque, ex. gr., punctum D curvae ADC tale, ut intercepta inter curvam, & tangenrem ND sit nihilo aequalis, seu infinitesima ordinis superioris relate ad ordinem aliarum interceptarum in caeteris punctis ejusdem curvae; sumantur duo puncta S, R hinc inde a puncto

cto B in linea abscissarum, & huic puncto infinite proxima; supponamus puncto S competere unicam ordinatam SX, & puncto R unicam ordinatam ZR ambas positivas, aut negativas, tum interceptas XM, ZN inter curvam, & tangentem esse ambas negativas; ut in figura 25., & in hoc casu arcus AD, DC ambo vertunt concavitatem ad diametrum BA, unus ex una parte, alius ex alia ordinatae BD. Ergo in puncto D neque est flexus contrarius, neque regressus; sed tantum ordinata BD erit maxima ex ordinatis istorum arcuum. Si intercepta XM esset negativa, & NZ positiva, ut in figura 26., tunc arcus AD vertit concavitatem, & DC convexitatem ad diametrum AB, unus ex una parte, alius ex alia ordinatae BD. Ergo punctum D erit punctum flexus contrarii. Si in puncto R ordinatae sint imaginariae, sed puncto S competant duae ordinatae SX, SZ ambae positivas, aut negativas, & interceptae XM, ZM sint ambae negativas ut in figura 27., tunc arcus AD,
B C

BC ambo vereunt concavitatem ad diametrum AB, sed ambo ex eadem parte ordinatae BD. Ergo punctum D est punctum regressus primae speciei. Si vero intercepta XM sit negativa, & MZ e contra sit positiva, tunc arcus AD concavitatem arcus DC convexitatem vertit ad diametrum AB ex eadem parte ordinatae BD. Ergo punctum D est punctum regressus altetius speciei. Et sic eadem methodo procedendo in aliis combinationibus, non erit difficile determinate alterationem curvae in puncto D. Atque haec est methodus, qua usus est etiam celeberrimus Pater Vincentius Riccati Societatis Jesu in Dissertatione, quae inscribitur: *Animadversiones in fractionem, cujus numerator & denominator per certam determinationem nibilo aequales sunt*: quae inserta est Tom. 2. Comm. Academiae Bononiensis. Et haec mihi videntur sufficere pro Elementis Geometriae Infinitesimorum.

APPRO-

A P P R O B A T I O.

*J*USSU Reverendiss. P. D. Cherubini Brancan-
ni Abbatis Generalis Congregationis Cae-
lestinorum diligenter expendimus librum, cui
titulus est = Elementa Geometriae infiniti-
tesimorum = a P. D. Hieronymo Saladini
ejusdem Congregationis Monacho compositum,
& quum in ea Translatione nihil Religioni
& moribus adversum nobis occurrerit; imo
vero quum dirigendis, & juvandis studiis
sublimioris Mathematicae mirifice opportuna
visa sit, hinc typis evulgari posse, sen-
sentia nostra est.

D. Fridericus de Judice Abbas S. Eu-
sepii Romae.

D. Appianus Bonafedius Abbas S. Jo-
annis Baptistae Bononiae.

D. CHE-

D. CHERUBINUS BRANCONIUS
 Abbas Generalis Congregationis
 Caelestinorum.

Quum dñs Congregationis nostrae Theologi expenderint opus, cujus titulus est
 = Elementa Geometriae infinitesimorum = *atque edi posse retulerint, facultatem facimus D. Hieronymo Saladini Operis auctori illud typis divulgandi, si iis, ad quos spectat, ita videbitur.*

Datum ex nostro Monasterio S. Jo. Baptistae Bononiae die 1. Maji Anno 1760.

D. Cherubinus Branconius
 Abbas Generalis.

D. Michael Sangiorgius a Secretis.

Vidit

*Vidit D. Joannes Maria Vidari Clericus Regularis S. Pauli , & in Ecclesia Metropolitana Bononiae Poenitentiarius pro Eminentissimo , & Reverendissimo Domino D. VINCENTIO Cardinali MALVE-
TIO Archiepiscopo Bononiae , & S. R. I. Principe .*

Die 5. Julii 1760.

Imprimatur .

F. P. P. Salvatori Vicarius Generalis Sancti Officii Bononiae .

ERRATA.

CORRIGE.

Pag. lin.

62	10	infinitum	finitum
65	7	SR respectu SM	SM respectu SR
68	10	QN, NR	NR, QN
	11	QO, OR	OR, QO
69	2	QO, OR	OR, QO

Propositioni XVII. Lib. Pr. Pag. 34 lin. 6 adde;
 modo angulus A C B non sit rectus,
 neque differat a recto quantitate in-
 finitissima.

1111

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$

1. The first step is to identify the key components of the system. This includes understanding the hardware, software, and data involved.

[illegible]

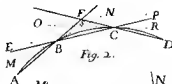


Fig. 2.

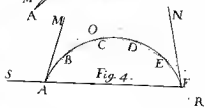


Fig. 4.



Fig. 5.

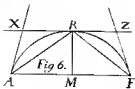
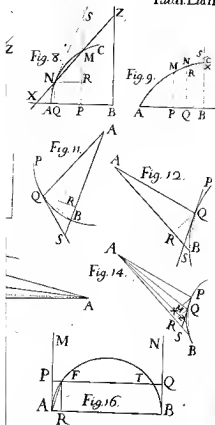
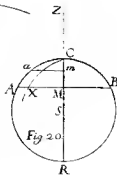
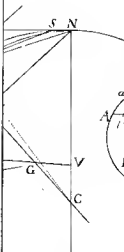
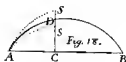


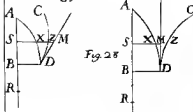
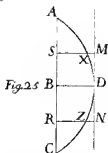
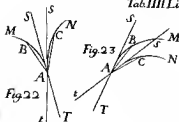
Fig. 6.















185

